

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

Физический факультет
Кафедра физики элементарных частиц

Бакалаврская работа

«Оптимизация чувствительности нейтринных ускорительных экспериментов
для измерения иерархии масс нейтрино»

Выполнила студентка 4 курса, 409 группы

Колупаева Людмила Дмитриевна

Научные руководители:

доктор физ.-мат. наук Ольшевский Александр Григорьевич

кандидат физ.-мат. наук Самойлов Олег Борисович

Заведующий кафедрой академик РАН Матвеев В.А.

Москва 2015

Оглавление

Введение	3
Осцилляции нейтрино	6
Осцилляции нейтрино в вакууме	6
Осцилляции нейтрино в веществе	10
Иерархия масс нейтрино	13
Эксперимент $\text{NO}\nu\text{A}$	17
GLoBES для $\text{NO}\nu\text{A}$	19
Чувствительность $\text{NO}\nu\text{A}$	27
Выводы	35

Введение

Нейтрино — стабильная нейтральная частица, относящаяся к лептонам Стандартной Модели. Эта частица уникальна - она участвует исключительно в слабых взаимодействиях и обладает беспрецедентно высокой проникающей способностью $\sigma \approx 10^{-44} \text{см}^2$, что определенно делает ее обнаружение и изучение интереснейшей задачей.

Явление осцилляций, окончательно подтвержденное в конце прошлого столетия и основанное на концепции смешивания нейтрино, нарушает фундаментальный закон сохранения лептонного числа и указывает на физику вне рамок Стандартной Модели. Поэтому неугасаемый научный интерес современных физиков к этому феномену вполне обоснован.

Крупным экспериментальным результатам последнего десятилетия предшествовал длительный период теорий, предсказаний и редких, но необычайно важных открытий.

В самом начале XX века перед физиками встала серьезная проблема: в β -распаде нарушались законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Все мировое сообщество (и даже Нильс Бор, стоящий у истоков квантовой механики) было готово признать нарушение фундаментальных законов на микроуровне. Но в 1930 году в письме Тюбингемскому научному конгрессу Вольфганг Паули смело предположил существование неуловимой частицы, которая испускается при β -распаде вместе с электроном. Впоследствии Энрико Ферми предложил назвать ее "нейтрино". Начались долгие поиски этой частицы, которые увенчались успехом только спустя 23 года.

В 1953 году Ф.Райенсом и К.Козном был проведен блестящий эксперимент «Проект Полтергейст», результатом которого была регистрация антинейтрино от ядерного реактора — так впервые была детектирована эта частица. Впоследствии стало понятно, что найденное (анти)нейтрино - элек-

тронное. Далее следовали открытия мюонного нейтрино в 1961 и таонного - в 2000. Параллельно проходило всестороннее изучение свойств: была выполнена проверка неэквивалентности частицы и античастицы (в реакции предложенной Б.Понтекорво), было выявлено нарушение четности, определена спиральность, изучалось рассеяние на других частицах, на LEP было получено доказательство существования трех типов легчайших нейтрино. В 1970 впервые наблюдались нейтрино от Солнца, однако возникла проблема солнечных нейтрино — недостаток частиц нужного флейвора. Объяснение этому эффекту было предложено ранее.

В 1958 году Б.Понтекорво предположил и обосновал наличие ненулевой массы нейтрино, существование нейтринных осцилляций и нарушение лептонного числа. Это событие положило начало эре крупных экспериментов, цель которых в настоящее время заключается не столько в подтверждении существования осцилляций, сколько в уточнении параметров теории и исследовании свойств этой уникальной частицы.

Для теоретического описания явления осцилляций выделяют шесть осцилляционных параметров [4]: три угла смешивания матрицы Понтекорво-Маки-Накагава-Саката — PMNS (θ_{12} , θ_{23} , θ_{13}), CP фаза δ , атмосферная разница квадратов $|\Delta m_{32}^2|$, солнечная разница квадратов Δm_{21}^2 . В качестве еще одного параметра вводят знак Δm_{32}^2 , который называется "иерархия масс нейтрино".

$$\Delta m_{21}^2 = 7.5_{-0.17}^{+0.19} \times 10^{-5} \text{эВ}^2$$

$$\sin^2 \theta_{12} = 0.3_{-0.012}^{+0.013}$$

$$\Delta m_{32}^2 = 2.457_{-0.047}^{+0.047} \times 10^{-3} \text{эВ}^2$$

$$\sin^2 \theta_{23} = 0.452_{-0.028}^{+0.052}$$

$$\sin^2 \theta_{13} = 0.0218_{-0.0010}^{+0.0010}$$

δ_{CP} в интервале $[0; 2\pi]$

Нет никаких сомнений в существовании, по крайней мере, трех типов нейтрино — электронного ν_e , мюонного ν_μ и тау-нейтрино ν_τ . Гипотеза о смешивании нейтрино (в ее справедливости так же нет никаких сомнений) приводит к еще более удивительному результату: каждый тип флейворного нейтрино представляет собой когерентную суперпозицию массивных нейтрино. Считается, что таких нейтрино так же как минимум три. Усилия современных физиков направлены на изучение свойств именно этих нейтрино. Их массы хоть и малы, но представляют собой конечную величину. Осцилляционные

эксперименты не чувствительны к точному значению массы нейтрино, однако вероятности осцилляций зависят от разницы квадратов: $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$. Таким образом, на данный момент в распоряжении физиков есть с некоторой точностью все три разницы квадратов масс, но их порядок расположения неизвестен. Сложность возникает из-за того, что одна из разностей квадратов масс много меньше двух других. В этом и заключается "проблема иерархии масс нейтрино".

В программу исследований многих современных нейтринных экспериментов входят такие актуальные задачи, как исследование иерархии масс и измерение δ_{CP} фазы в лептонном секторе. Фундаментальная проблема иерархии масс нейтрино может быть исследована как в ускорительных, так и в реакторных экспериментах, однако в основе каждого метода лежат разные эффекты: осцилляции в веществе (MSW - эффект Михеева-Смирнова-Вольфенштейна), интерференция «солнечного» и «атмосферного» режимов осцилляций соответственно. Сама возможность подобного рода исследований появилась благодаря недавнему результату — измерению θ_{13} , который оказался ненулевым.

Выполненная бакалаврская работа посвящена изучению влияния некоторых факторов на результаты измерения иерархии масс в нейтринном ускорительном эксперименте NO ν A. Эффект, подлежащий измерению, достаточно мал, поэтому требуется детальный анализ возможных систематических ошибок, в том числе теоретических, которые могут повлиять на результаты эксперимента.

В работе была изучена теоретическая неопределенность, возникающая при использовании различных приближений расчета эффекта MSW и вариаций плотности вещества на пути пучка. Также было исследовано влияние параметров, связанных непосредственно с экспериментальным измерением: эффективности и разрешения установки, времени и стратегии набора данных. Для этого на языке C/C++ были реализованы схемы вычислений первого и второго порядка, проведено сравнение с точными формулами вероятностей. Для учета этих эффектов в условиях конкретного эксперимента использовался пакет GLOBES [9], для которого на языке C были написаны программы управления и анализа. Для графического представления результатов использовался пакет ROOT.

Осцилляции нейтрино

Осцилляции нейтрино в вакууме

Осцилляции нейтрино — периодический процесс переходов между различными видами флейворных нейтрино в пучках. Пусть пучок был произведен в заряженных токах слабых распадов.

Эволюция состояния определяется уравнением Шредингера:

$$i\frac{\partial|\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H|\Psi(t)\rangle. \quad (1)$$

Для вакуума, где H — свободный гамильтониан, общее решение уравнения имеет вид:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\Psi(0)\rangle. \quad (2)$$

Применим эти соображения к нейтринному пучку. Пусть начальное состояние флейворного нейтрино задается выражением:

$$|\nu_l\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{li}^* |\nu_i\rangle, \quad l = e, \mu, \tau. \quad (3)$$

Здесь ν_i — поля нейтрино с массами m_i ($i=1,2,3$), унитарная матрица 3×3 U называется матрицей Понтекорво-Маки-Накагава-Саката (PMNS). Таким образом, в случае смешивающихся нейтрино с малыми разностями квадратов масс, флейворные нейтрино — когерентная суперпозиция состояний нейтрино с определенной массой.

В приведенных выше рассуждениях начальное состояние $|\Psi(0)\rangle = |\nu_l\rangle$. Учтем, что $H|\nu_i\rangle = E_i|\nu_i\rangle$, где $E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}$. Тогда из (3) и (2) находим, что состояние левоспирального нейтрино в момент времени $t \geq 0$ определяется

выражением:

$$|\nu_l\rangle_t = e^{-iHt}|\nu_l\rangle = \sum_{i=1}^3 e^{-iE_i t} U_{li}^* |\nu_i\rangle. \quad (4)$$

В общем случае энергии нейтрино разные, состояния $|\nu_l\rangle_t$ — нестационарные состояния, тогда различные компоненты пучка когерентных нейтрино получают разные фазы. Состав конечного состояния отличается по ароматам от состава начального. Раскладывая состояние по полной системе, получаем:

$$|\nu_l\rangle_t = e^{-iHt}|\nu_l\rangle = \sum_{l'} |\nu_{l'}\rangle \langle \nu_{l'} | e^{-iHt} | \nu_l \rangle. \quad (5)$$

где $\langle \nu_{l'} | e^{-iHt} | \nu_l \rangle$ — амплитуда вероятности обнаружить в момент времени t флейворное нейтрино $\nu_{l'}$ в пучке нейтрино, изначально состоявших из ν_l . Объединяя данное и (3) находим:

$$\langle \nu_{l'} | e^{-iHt} | \nu_l \rangle = \sum_{i,i'} U_{l'i'} \langle \nu_{i'} | e^{-iHt} | \nu_i \rangle U_{li}^* = \sum_{i=1}^3 U_{l'i} e^{-iE_i t} U_{li}^* \equiv A(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}). \quad (6)$$

Вероятности перехода соответственно равны

$$P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) = \left| \sum_{i=1}^3 U_{l'i} e^{-iE_i t} U_{li}^* \right|^2. \quad (7)$$

Примечательно, что всю теорию можно обобщить на случай существования стерильных нейтрино. В таком случае получим:

$$\nu_{lL} = \sum_{i=1}^{3+n_s} U_{li} \nu_{iL}, \quad l = e, \mu, \tau; \quad \nu_{sL} = \sum_{i=1}^{3+n_s} U_{si} \nu_{iL}, \quad s = s_1 \dots s_{n_s}; \quad |\nu_l\rangle = \sum_{i=1}^{3+n_s} U_{li}^* |\nu_i\rangle. \quad (8)$$

Учитывая, что фаза ненаблюдаема, можно переписать выражение для вероятности перехода одного типа нейтрино в другой (с учетом существования стерильных нейтрино):

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}) = \left| \sum_{i=1}^{3+n_s} U_{\alpha'i} e^{-i(E_i - E_j)t} U_{\alpha i}^* \right|^2, \quad (9)$$

где j фиксируется. Так, вероятности зависят от элементов матрицы смешивания и $2 + n_s$ разностей фаз.

Предположим, состояния смешивающихся нейтрино можно характеризовать импульсом p и массой m_i , а также элементами матрицы смешивания $U_{\alpha i}$ и спиральностью -1 , положим $p_i = p$. Учитывая $\frac{m_i^2}{p^2} \ll 1$:

$$E_i \simeq p + \frac{m_i^2}{2p}, \quad E_i - E_j \simeq \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}, \quad (10)$$

где $E \simeq p$ — энергия нейтрино и $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$.

В формуле (9) t — разница времени образования нейтрино и времени детектирования. В случае ультрарелятивистских нейтрино можно считать $t \simeq L$, где L — расстояние между точками рождения и детектирования нейтрино. Тогда для фазы осцилляций имеем выражение:

$$(E_i - E_j)t \simeq \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}L, \quad (11)$$

учитывая также

$$\sum_i U_{\alpha' i} U_{\alpha i}^* = \delta_{\alpha' \alpha}, \quad (12)$$

из (9) получаем:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}) = |\delta_{\alpha' \alpha} + \sum_{i \neq j} U_{\alpha' i} (e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}L} - 1) U_{\alpha i}^*|^2. \quad (13)$$

Рассмотрим простейший случай осцилляций двух типов нейтрино

$$\nu_\alpha \rightleftharpoons \nu_{\alpha'} \quad (\alpha, \alpha' = e, \mu, \tau, s_1, \dots), \quad (14)$$

тогда

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{i=1,2} U_{\alpha i} \nu_{iL}, \quad (15)$$

где U — унитарная матрица 2×2 . Пусть $m_1 < m_2$, тогда из (13) для $j = 1$ имеем:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}) = |\delta_{\alpha' \alpha} + U_{\alpha' 2} (e^{-i \frac{\Delta m^2}{2E}L} - 1) U_{\alpha 2}^*|^2. \quad (16)$$

Здесь $\Delta m^2 = \Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2$. Рассмотрим случай $\alpha' \neq \alpha$. Тогда для вероятности перехода получим

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}) = 2|U_{\alpha' 2}|^2 |U_{\alpha 2}|^2 \left(1 - \cos \frac{\Delta m^2}{2E}L \right) \quad (\alpha' \neq \alpha). \quad (17)$$

Если ν_1 и ν_2 — дираковские частицы, то матрица смешивания будет действительной. В случае CP инвариантности в лептонном секторе это следует автоматически. Если нейтрино — майорановские частицы, то в матрице присутствует CP фаза, не входящая в вероятность перехода. В таком случае приведенное выше выражение будет всегда справедливо. Ортогональная матрица смешивания 2×2 имеет следующий вид:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где θ — угол смешивания. Тогда формула для вероятности примет стандартный вид:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left(1 - \cos \frac{\Delta m^2}{2E} L \right) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E} L \quad (\alpha \neq \alpha'). \quad (19)$$

Из (16) мы получаем следующую формулу:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left(1 - \cos \frac{\Delta m^2}{2E} L \right). \quad (20)$$

Все приведенные выше рассуждения записаны в предположении $\hbar = c = 1$. С использованием этих констант формулы приобретут немного иной вид:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}) &= \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left(1 - \cos \frac{\Delta m^2 c^4}{2E \hbar c} L \right) = \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 c^4}{4E \hbar c} L = \sin^2 2\theta \sin^2 1.27 \frac{\Delta m^2}{E} L. \end{aligned} \quad (21)$$

Так, вероятности перехода между двумя типами нейтрино и антинейтрино описываются двумя осцилляционными параметрами: $\sin^2 2\theta$ и Δm^2 . Введем длину осцилляции $L_{osc} = 4\pi \frac{E}{\Delta m^2}$. Тогда выражение для вероятности можно переписать в виде:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left(1 - \cos 2\pi \frac{L}{L_{osc}} \right) \quad (\alpha \neq \alpha'). \quad (22)$$

Рассмотрим осцилляции в вакууме в случае трех типов смешивающихся нейтрино. Отсюда флейворное поле можно определить следующим образом:

$$\nu_{lL}(x) = \sum_{i=1}^3 U_{li} \nu_{iL}(x) \quad (l = e, \mu, \tau). \quad (23)$$

Фактически, матрица смешивания для дираковских частиц будет иметь одну CP фазу, а для майорановских частиц — три CP фазы. Так как майорановские фазы не входят в амплитуды перехода, то нельзя непосредственно определить природу нейтрино с помощью изучения феномена осцилляций. В общем случае трехнейтринного смешивания вероятности зависят от шести параметров: двух разностей квадратов масс нейтрино Δm_{21}^2 и Δm_{32}^2 , трех углов смешивания $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$, одной CP фазы δ . Экспериментально определено, что одна разность квадратов масс нейтрино много меньше других, тогда можно считать, что вероятности определяются формулами для двухнейтринных осцилляций с точностью до нескольких процентов. Например, пусть осцилляции будут определяться разницей Δm_{32}^2 (это для случая атмосферных, ускорительных на длинной базе и реакторных экспериментов). В таком случае

$$\frac{\Delta m_{32}^2}{2E}L \geq 1. \quad (24)$$

Для величин с параметром $\frac{L}{E}$, для которых Δm_{21}^2 мало и пренебрежимо:

$$\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}L = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{32}^2} \frac{\Delta m_{32}^2}{2E}L \ll 1. \quad (25)$$

В таком приближении получается следующая формула для вероятности:

$$P(\nu_l \rightarrow \nu_l) \simeq |\delta_{ll} + U_{l3}(e^{-i\frac{\Delta m_{32}^2}{2E}L} - 1)U_{l3}^*|^2. \quad (26)$$

Осцилляции нейтрино в веществе

При распространении пучка нейтрино в веществе картина усложняется. Механизм осцилляций для нейтрино в веществе был рассмотрен С.П. Михеевым, А.Ю. Смирновым и независимо Л.Вольфенштейном (MSW).

Нейтрино взаимодействуют с материей через нейтральные токи (Z^0 — все типы нейтрино) и через заряженные токи (W^\pm — только электронные нейтрино в веществе Земли). Обычное некогерентное рассеяние не имеет отношения к осцилляциям — оно приводит только к уменьшению интенсивности пучка и может быть учтено комплексным вкладом в гамильтониан. Этот вклад пропорционален амплитуде рассеяния и подавлен малостью константы Ферми,

поэтому может не учитываться. Ситуация кардинально меняется для когерентного рассеяния вперед. Оно также пропорционально константе Ферми, но ввиду большого числа рассеивающих центров (амплитуды складываются когерентно) вклад в гамильтониан становится существенным.

Рассмотрим осцилляции в веществе в случае двух типов нейтрино.

Причина осцилляций нейтрино в веществе имеет другую природу, нежели в вакууме. Во втором случае скорости $m_i(1, 2, 3)$ различны из-за разных масс, поэтому возникают разные фазы массивных состояний. В веществе причиной разницы фаз является разная энергия массивных состояний.

Пусть нейтрино распространяется в некоем потенциале, который является различным для разных флейворных нейтрино.

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = (H_f + V) \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Введем потенциалы для каждого флейвора в общем случае V_α, V_β . Учитывая, что свободный гамильтониан $H_f = U H U^\dagger$, $H = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix}$, $H_0 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, получим:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \left[H_0 + \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + V_\alpha & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + V_\beta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Результат не изменится, если прибавить константу:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \left[H_0 + \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + (V_\alpha - V_\beta) & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Теперь нельзя утверждать, что базис флейворных нейтрино связан с базисом массивных через ортогональную матрицу поворота. Взаимодействие с потенциалом меняет собственные векторы. Для того чтобы учесть влияние вещества, можно ввести эффективную массу. В вакууме выполнялось $E^2 - p^2 = m_i^2$, в потенциале V $(E + V)^2 - p^2 \simeq m_i^2 + 2EV$, то есть эффективная масса $m'_i = \sqrt{m_i^2 + 2EV}$:

$$V_\alpha - V_\beta = 2\sqrt{2} G_F E N_e. \quad (30)$$

Здесь E — энергия нейтрино, N_e — плотность электронов в веществе. Совершаем переход из базиса флейворных нейтрино в базис массивных:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} &= U^\dagger \left[H_0 + \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + (V_\alpha - V_\beta) & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \\ &= \left[\frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 + \Delta V \cos^2 \theta & \Delta V \cos \theta \sin \theta \\ \Delta V \cos \theta \sin \theta & m_2^2 + \Delta V \sin^2 \theta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь $\Delta V = V_\alpha - V_\beta$. Теперь матрица смешивания не диагональна. Собственные векторы в веществе не являются таковыми в вакууме. Для получения правильных собственных векторов нужно диагонализировать матрицу. После диагонализации получим, что собственные значения в веществе:

$$m_{1m,2m}^2 = \frac{1}{2} \left[(m_1^2 + m_2^2 + \Delta V) \pm \sqrt{(\Delta V - \Delta m^2 \cos 2\theta)^2 + (\Delta m^2)^2 \sin^2 2\theta} \right], \quad (32)$$

$$\Delta m_m^2 = \Delta m^2 \sqrt{(\Delta V / \Delta m^2 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta},$$

а угол смешивания в веществе в случае смешивания двух типов нейтрино:

$$\sin 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{(\Delta V / \Delta m^2 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}}.$$

Эта формула примечательна тем, что при выполнении условия $\Delta V / \Delta m^2 = \cos 2\theta$ получаем, что $\sin 2\theta_m = 1$ вне зависимости от вакуумного угла смешивания. То есть существует такая плотность электронов, при которой вероятность осцилляций достигает максимума, даже если в вакууме смешивание мало. Эта особенность получила название MSW-резонанса.

Таким образом мы приходим к уже знакомому по вакуумным осцилляциям виду (но с эффективными углом смешивания и разностью квадратов масс):

$$P_m(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2(2\theta_m) \sin^2 \left(1.27 \Delta m_m^2 \frac{L}{E} \right) \quad (33)$$

Иерархия масс нейтрино

Из экспериментальных данных по нейтринным осцилляциям следует, что одна разность квадратов (солнечная) много меньше, чем остальные. Источником большей части информации об атмосферной разнице квадратов масс являлись эксперименты с атмосферными нейтрино. Вероятность $P_{\mu\mu}$ инвариантна относительно замены знака Δm_{31}^2 . Таким образом появляется неопределенность, которая является объектом исследования в нынешних и многих будущих экспериментах.

Для трех типов нейтрино возможно два типа спектра масс:

- 1) нормальный спектр $m_1 < m_2 < m_3$, $\Delta m_{21}^2 \ll \Delta m_{32}^2$;
- 2) обратный спектр $m_3 < m_1 < m_2$, $\Delta m_{21}^2 \ll |\Delta m_{31}^2|$.

В случае нормального спектра нейтрино массы $m_{2,3}$ связаны с легкой массой m_1 и Δm_{21}^2 и Δm_{32}^2 следующими соотношениями:

$$m_2 = \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{21}^2}, \quad m_3 = \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{21}^2 + \Delta m_{32}^2}. \quad (34)$$

Для обратного спектра:

$$m_1 = \sqrt{m_3^2 + |\Delta m_{31}^2|}, \quad m_2 = \sqrt{m_3^2 + |\Delta m_{31}^2| + \Delta m_{21}^2}. \quad (35)$$

В общем случае можно рассмотреть три типа спектров масс:

- 1) нормальная иерархия нейтринных масс $m_1 \ll m_2 \ll m_3$
- 2) обратная иерархия нейтринных масс $m_3 \ll m_1 < m_2$
- 3) квазивыврожденный случай $m_1 \simeq m_2 \simeq m_3$, $m_1(m_3) \gg \sqrt{\Delta m_{32}^2}(\sqrt{|\Delta m_{31}^2|})$.

Нормальная иерархия

В таком случае в предположении близости массы легчайшего нейтрино к нулю можно приближенно получить массы m_2, m_3 через разности квадратов:

$$m_1 \ll \sqrt{\Delta m_{21}^2}, \quad m_2 \simeq \sqrt{\Delta m_{21}^2}, \quad m_3 \simeq \sqrt{\Delta m_{32}^2}. \quad (36)$$

Пренебрегая массой легчайшего нейтрино и используя стандартную параметризацию матрицы смешивания нейтрино:

$$U = \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{23}s_{12} - c_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

получаем для майорановской массы безнейтринного двойного бета распада:

$$|m_{\beta\beta}| \simeq |\sin^2 \theta_{12} \sqrt{\Delta m_{21}^2} + e^{2i\alpha} \sin^2 \theta_{13} \sqrt{\Delta m_{32}^2}|, \quad (38)$$

здесь α — неизвестная разность майорановских фаз. Используя экспериментальные данные, можно записать:

$$|m_{\beta\beta}| \leq (\sin^2 \theta_{12} \sqrt{\Delta m_{21}^2} + \sin^2 \theta_{13} \sqrt{\Delta m_{32}^2}) \leq 5.3 \cdot 10^{-3} \text{эВ}. \quad (39)$$

Обратная иерархия

Для масс нейтрино в этом случае:

$$m_3 \ll \sqrt{|\Delta m_{31}^2|}, \quad m_1 \simeq \sqrt{|\Delta m_{31}^2|}, \quad m_2 \simeq \sqrt{|\Delta m_{31}^2|} \left(1 + \frac{\Delta m_{21}^2}{2|\Delta m_{31}^2|} \right). \quad (40)$$

В выражении для эффективной майорановской массы $|m_{\beta\beta}|$ самая маленькая масса m_3 умножается на малый параметр $\sin^2 \theta_{13}$. Пренебрегая этим вкладом, а так же малостью $\frac{\Delta m_{21}^2}{2|\Delta m_{31}^2|}$, получаем:

$$|m_{\beta\beta}| \simeq \sqrt{|\Delta m_{31}^2|} \sqrt{1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \alpha}, \quad (41)$$

где α — разность майорановских фаз элементов U_{e1} и U_{e2} . В случае обратной иерархии эта фаза — единственный неизвестный параметр.

Квазивырожденный случай

Пренебрегая малым вкладом $\sin^2 \theta_{13}$, эффективная майорановская масса может быть записана в следующем виде:

$$|m_{\beta\beta}| \simeq m_{min} \sqrt{1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \alpha}, \quad (42)$$

где m_{min} — масса легчайшего нейтрино, а α — разность фаз. Информация о массе самого легкого нейтрино может быть получена из изучения высокоэнергетической части бета-спектра трития. По существующим данным верхняя граница $m_{min} < 2.2$ эВ (Майнц и Троицк).

В теории обсуждаются оба варианта иерархий. Для моделей основанных на флейворных симметриях $L_e - L_\mu - L_\tau$ предпочтительнее обратная иерархия. В противоположность этому большая часть моделей великого объединения с использованием обычного типа I механизма качелей предпочитает прямую иерархию. Таким образом экспериментальное обнаружение реального вида спектра масс будет служить своего рода фильтром для разных моделей, но ситуация усложнится из-за моделей великого объединения с механизмом качелей типа I и II, которые могут быть построены в предположении обоих типов иерархий масс.

Существует достаточно большое количество экспериментов, которые подвержены влиянию эффекта иерархии масс — это солнечные нейтринные эксперименты, измерение нейтрино от взрывов сверхновых, безнейтринный двойной бета распад и прямое измерение масс нейтрино. Однако их ожидаемая чувствительность вряд ли предоставит какую-либо полезную информацию.

Осцилляции солнечных нейтрино чувствительны в большей степени к знаку Δm_{21}^2 . Наблюдение нейтрино от коллапсирующих сверхновых будут чувствительны к иерархии масс через MSW эффект: это эффекты в ядре и эффект за счет прохождения адиабатических слоев. Если со вторым пунктом никаких проблем нет, то физика в ядре не до конца понятна. Необходимо понимать ее, чтобы быть уверенными, что они не размывают стандартный MSW до того предела, когда определение иерархии невозможно.

Таким образом из-за больших неопределенностей есть неизбежные сложности в использовании этого способа для определения иерархии. Вместо этого знание иерархии внесет ценный вклад в моделирование сверхновой. Текущие эксперименты по прямому измерению массы нейтрино, к сожалению, не имеют достаточной чувствительности для измерения иерархии. Возможно, в обозримом будущем эти эксперименты достигнут точности ниже 0.1 эВ.

Эксперименты по безнейтринному двойному бета распаду чувствительны к иерархии масс, но взятые в отдельности не могут обеспечить окончательное

измерение, по крайней мере, если измерение не производится в области пространства, отвечающей окончательному значению параметров. Однозначная область, к сожалению, возникает при очень низкой скорости распада — много порядков ниже, чем нынешние эксперименты. Для этого вида экспериментов также происходит обратный эффект: иерархию нейтрино определить отсюда не удастся, но знание порядка масс даст ценный вклад в это направление.

Пожалуй, самыми распространенными и оптимальными экспериментами для определения иерархии масс являются ускорительные и реакторные эксперименты. В основе каждого метода лежат разные эффекты: осцилляции в веществе (MSW) и интерференция «солнечного» и «атмосферного» режимов осцилляций соответственно. Как было указано выше, в отсутствии вещества вероятности осцилляций не чувствительны к замене знака разности квадратов масс. Ненулевая CP фаза могла бы исправить ситуацию. Но для вакуума вероятности также инвариантны относительно замены $\Delta m^2 \rightarrow -\Delta m^2$ и $\delta_{CP} \rightarrow -\delta_{CP}$ (для антинейтрино). Таким образом, измерение вероятностей для нейтрино/антинейтрино в вакууме не способно решить проблему иерархии масс. Иначе дело обстоит в веществе. Именно на этом основан метод поиска иерархии масс в современных осцилляционных ускорительных экспериментах.

Эксперимент $NO\nu A$

The NuMI Off-Axis ν_e Appearance Experiment ($NO\nu A$) [3,11] — эксперимент нового поколения на большой базе, предназначенный для изучения осцилляций нейтрино в Национальной ускорительной лаборатории им. Энрико Ферми. Постановка эксперимента осуществляется следующим образом. Пучок 120 ГэВ протонов модернизированного ускорителя NuMI сталкивается с графитовой мишенью. В таком столкновении рождаются пионы и каоны, которые, будучи заряженными одинаково, фокусируются в пучок магнитными горнами. Распадаясь, эти частицы производят нейтрино.

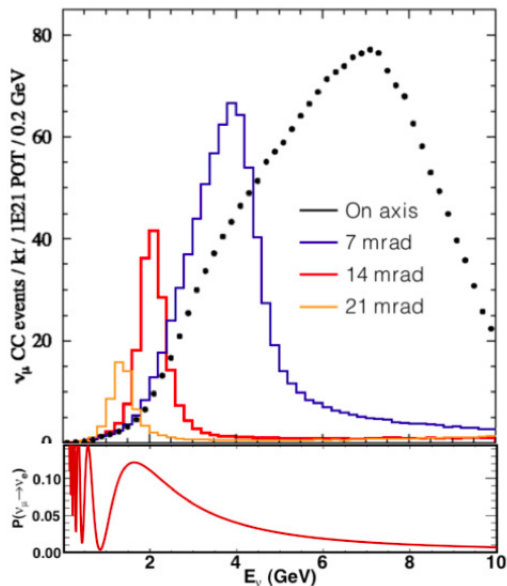


Рисунок 1 — Внеосевой эксперимент, угол 14 мрад

$NO\nu A$ предназначен для обнаружения электронного нейтрино в пучке мюонных с помощью 14 кт дальнего и аналогичного 300 т ближнего сегментированного детектора с жидким сцинтиллятором на расстоянии 810 км. Ближний детектор располагается в Fermilab и предназначен для определения изначального состава пучка и отсекаания фона. Детекторы располагаются под углом 14 мрад вне оси для того, чтобы получить узкий пучок вблизи первого осцилляционного максимума (порядка 2 ГэВ) (рис. 1).

Основные цели эксперимента:

- 1) определение иерархии нейтринных масс;

- 2) выявление указаний на CP нарушение в лептонном секторе;
- 3) уточнение угла смешивания θ_{13} из матрицы PMNS;
- 4) и определение октанта θ_{23} (больше 45° или меньше).

Кроме того, детекторы NO ν A могут быть использованы для изучения сечений нейтринно-нуклонных взаимодействий, магнитного момента нейтрино, существования стерильных нейтрино, монополей и т.д. Основная их задача — разрешить топологию событий взаимодействия нейтрино с веществом.

Детекторы хорошо гранулированы и являются прекрасными трековыми калориметрами. Они состоят из ячеек из отражающего поливинилхлорида, наполненных жидким сцинтиллятором (нефтяные масла с 5% примесью псевдокумола). Поперечный размер ячеек детектора 6×4 см, в длину — 15.6 м и 4.1 м в дальнем и в ближнем детекторе соответственно. Горизонтальные и вертикальные слои чередуют друг друга — так можно получать 3D информацию. В дальнем детекторе 344000 ячеек, в ближнем — ~ 18000 .

32 ячейки образуют модуль, каждый из которых соединен с одним фотодиодом. Модули соединены друг с другом; 12 шт в дальнем детекторе и 2-3 шт в ближнем образуют отдельную плоскость. Они ориентированы почти перпендикулярно пучку. Каждая плоскость (совпадает с длиной ячейки) порядка 0,15 радиационной длины. Такая высокая степень зернистости помогает отделить электроны от фоновых пионов.

У каждого детектора есть спектросмещающее оптоволокно, соединенное с лавинным фотодиодом. Сцинтилляционное излучение испускается изотропно, оно ловится оптоволокном и преобразовывает длину волны в область чувствительности фотодиодов, которые имеют преимущество перед другими фотодетекторами - высокую квантовую эффективность. Именно это дает возможность использовать очень длинные модули, что существенно снижает число каналов электроники.

GLOBES для $\text{NO}\nu\text{A}$

GLOBES [9,10] — свободная библиотека, которая позволяет получить данные некоторого абстрактного нейтринного эксперимента, который определяется пользователем. Интересующую информацию можно извлекать из спектра событий и, следовательно, изучать феномен нейтринных осцилляций.

Основным преимуществом этого симулятора является возможность объединения данных нескольких экспериментов - некоторого рода глобальный анализ данных существующих, будущих или абстрактных экспериментов. Даже предварительный анализ, который можно провести с помощью GLOBES — уже достаточно хорошая возможность оценить результаты и различные эффекты. Число событий определяется через вероятности, сечения, потоки и эффективность детектора следующим образом:

$$N \sim \text{Вероятность} \times \text{Поток} \times \text{Сечения} \times \text{Эффективность детектора.}$$

Этот пакет программ позволяет получить следующие результаты: частотный спектр событий, потоки и сечения, вероятность осцилляций исходного пучка в нейтрино другого типа и (самая главная возможность GLOBES) подсчет χ^2 с учетом корреляций между параметрами осцилляций $(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \Delta m_{sol}, \Delta m_{atm}, \rho)$ или только с учетом систематики.

В GLOBES χ^2 имеет Пуассоновскую форму:

$$\chi^2 = 2 \sum_{exp} \sum_{rules} \sum_{bins} \left(N^{th} - N^{obs} + N^{obs} \log \frac{N^{obs}}{N^{th}} \right) + \chi_{prior}^2.$$

Априорные ошибки и ошибки по pull-method вносят вклад в χ^2 :

$$\chi^2 = 2 \sum_{exp} \sum_{rules} \sum_{bins} \left(N^{th} - N^{obs} + N^{obs} \log \frac{N^{obs}}{N^{th}} \right) + \chi_{pull}^2 + \chi_{prior}^2,$$

$$\chi_{pull}^2 = \frac{a^2}{\sigma_a^2} + \frac{b^2}{\sigma_b^2} + \frac{c^2}{\sigma_c^2} + \frac{d^2}{\sigma_d^2},$$

$$N_i^{obs} = s_i(a, b) + b_i(c, d),$$

где $a(c), b(d)$ — параметры, связанные с нормировкой и калибровкой спектра для сигнала (фона).

По умолчанию возможны два вида систематических ошибок: ошибки нормировки и калибровки (или наклона) спектра. Для ошибки нормировки, для сигнала (для фона аналогично) в каждом бине:

$$s_i(a) = (1 + a) \cdot s_i.$$

Ошибка калибровки имеет две возможные формы. Ошибка, связанная с наклоном спектра (с линейным искажением спектра частоты событий):

$$s_i(a, b) = s_i(a) + b \cdot s_i \cdot \frac{E_i - E_{mean}}{E_{max} - E_{min}}.$$

Второй вариант наиболее близок к понятию калибровки спектра:

$$s_i(a, b) = (1 + b) \cdot [(s_{k+1}(a) - s_k(a)) \cdot (\delta - k) + s_k(a)],$$

$$\delta = b \cdot (i + t_0 + 1/2) + i$$

$$k = div(\delta, 1),$$

$$t_0 = E_{min}/\Delta E_0,$$

где ΔE_0 - ширина бина.

Для определения эксперимента в конфигурационном файле следует задать характеристики эксперимента [13,14]. В качестве ускорительного эксперимента был выбран недавно стартовавший NO ν A. Это эксперимент на появление $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ с базой 810 км, для получения пучка нейтрино используется протонный пучок 0.7 МВт с 6×10^{20} POT/год. На всем пути пучка предполагается постоянная плотность 2.8 г/см³, если не оговорено иное. Потoki для конфигурации ME (Medium Energy) был взяты из [6](рис. 2 - 3), сечения для низких энергий - [7], для высоких - [8](рис. 4 -6).

Таблица 1 — Используемые характеристики для старой и новой конфигурации

Характеристика	New NO ν A	Old NO ν A
Эффективность регистрации сигнала	45% $\nu_e, \bar{\nu}_e$ 100% QECC $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	26% $\nu_e, 40.5\% \bar{\nu}_e$ 100% QECC $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$
Эффективность регистрации фона	0.83% ν_μ CC, 0.22% $\bar{\nu}_\mu$ CC 1.35% ν_μ NC, 1.6% $\bar{\nu}_\mu$ NC 26% CC $\nu_e, 18\% \bar{\nu}_e$	0.13% $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$ CC 0.28% ν_μ NC, 0.88% $\bar{\nu}_\mu$ NC 16% CC $\nu_e, 33.6\% \bar{\nu}_e$
Энергетическое разрешение	$0.06\sqrt{E}$ CC μ^\pm $0.085\sqrt{E}$ e^\pm	$0.05\sqrt{E}$ CC μ^\pm $0.02\sqrt{E} + 0.085$ QE μ^\pm $0.01\sqrt{E}$ e^\pm

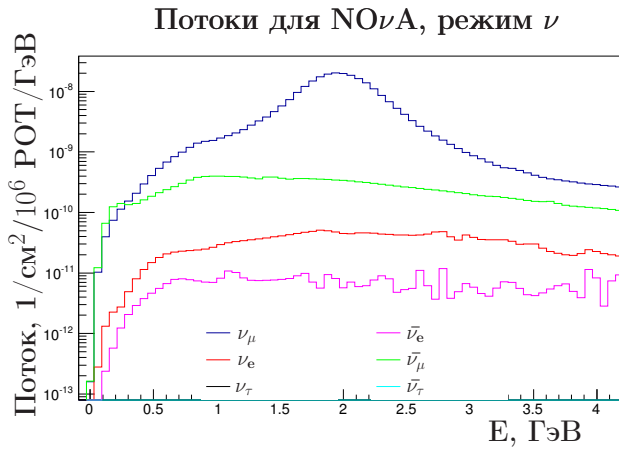


Рисунок 2 — Используемые потоки для нейтрино

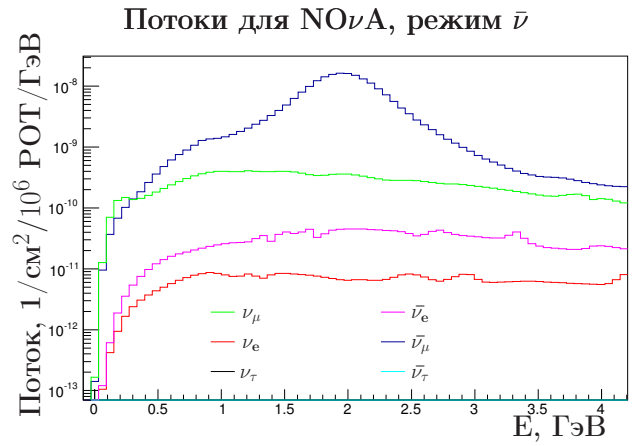


Рисунок 3 — Используемые потоки для антинейтрино

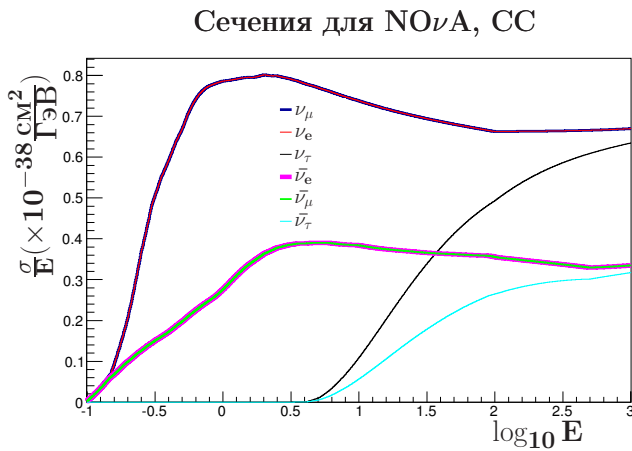


Рисунок 4 — Используемые сечения, CC взаимодействия

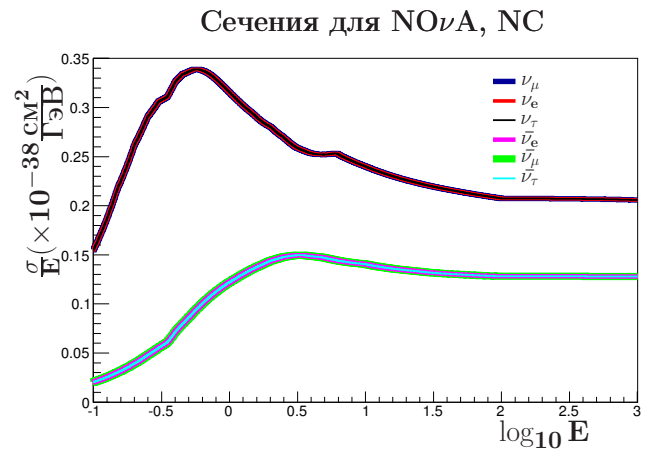


Рисунок 5 — Используемые сечения, NC взаимодействия

Сечения для NO ν A, QECC

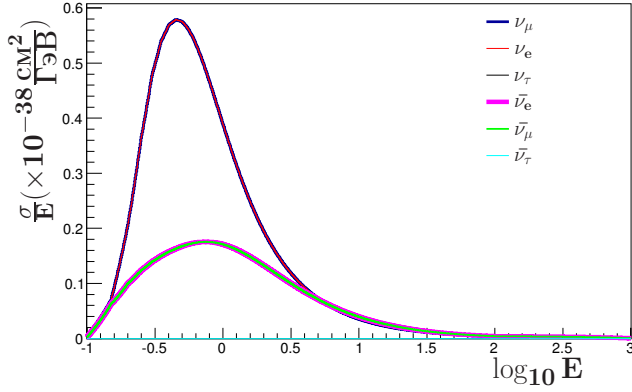


Рисунок 6 — Используемые сечения, ССQE взаимодействия

Чувствительность NO ν A к измерению иерархии

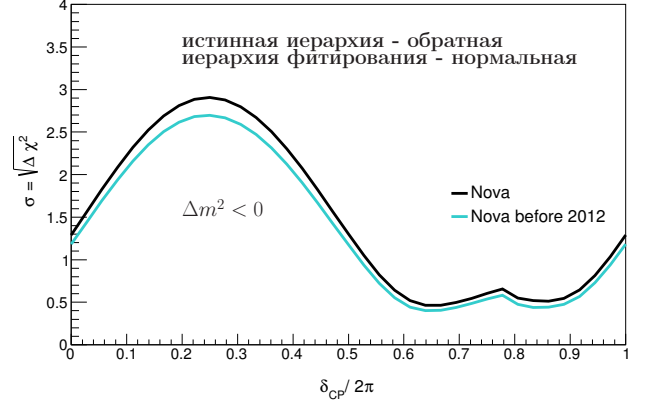


Рисунок 7 — Чувствительность для старой и новой конфигурации эксперимента

Во время подготовки эксперимента был измерен угол θ_{13} в реакторном эксперименте Daya Bay. Благодаря этому были несколько изменены критерии отбора событий [16], так как для случая малого θ_{13} необходимо было уменьшить фон. Теперь критерии стали более ослабленными, соответственно, стало больше сигнала и фона. После изменения критериев отбора изменилась и чувствительность эксперимента к измерению иерархии масс (рис. 7). О самой чувствительности и ее построении речь пойдет в следующей главе. Таким образом после 6 лет набора статистики числа событий исчезновения мюонного нейтрино (детектирование μ от ν_μ в QE событиях) и появления электронного нейтрино (детектирование ν_e в СС событиях) (рис. 8 - 11, Табл.2).

Таблица 2 — Числа событий для старой и новой конфигурации эксперимента

Числа событий	New NO ν A	Old NO ν A
появление ν_e , сигнал	90	52
появление ν_e , фон	36	11
появление $\bar{\nu}_e$, сигнал	25	23
появление $\bar{\nu}_e$, фон	13	1
исчезновение ν_μ , сигнал	210	209
исчезновение ν_μ , фон	20	2
исчезновение $\bar{\nu}_\mu$, сигнал	126	126
исчезновение $\bar{\nu}_\mu$, фон	10	23

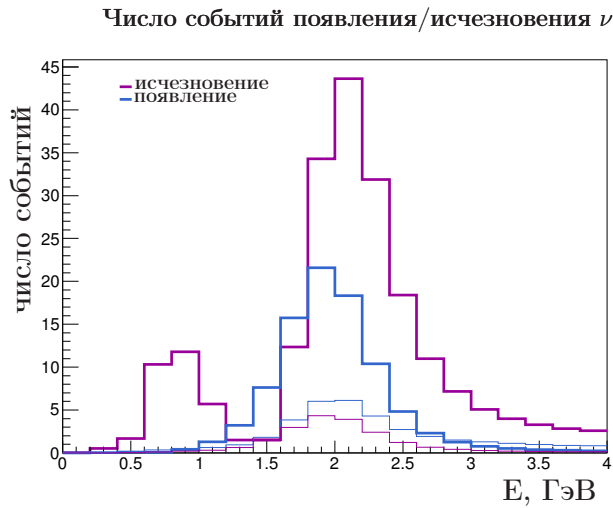


Рисунок 8 — Числа событий в современной конфигурации, режим нейтрино

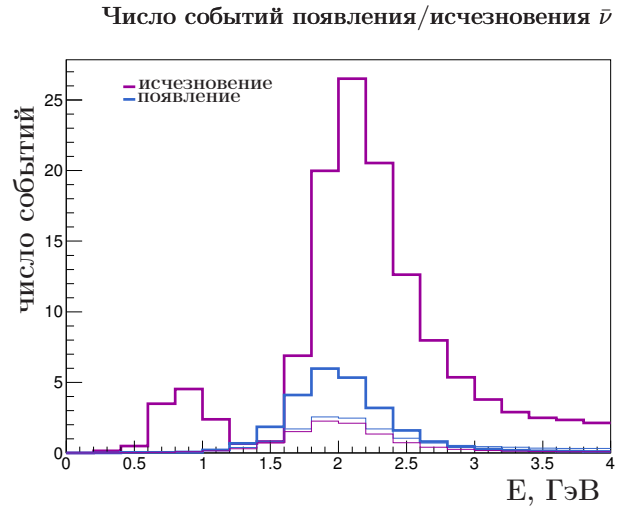


Рисунок 9 — Числа событий в современной конфигурации, режим антинейтрино

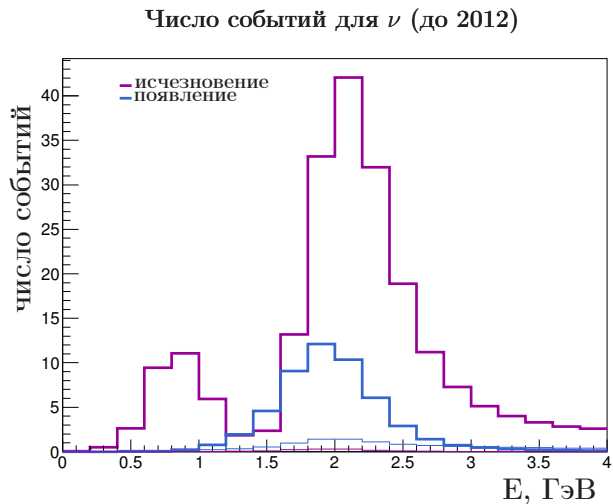


Рисунок 10 — Числа событий в первоначальной конфигурации, режим нейтрино

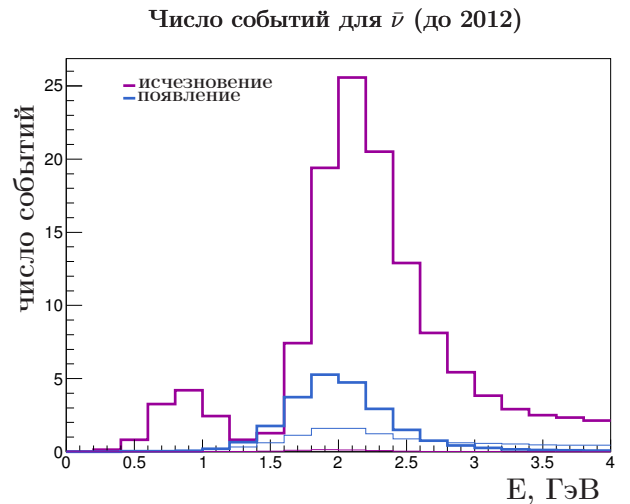


Рисунок 11 — Числа событий в первоначальной конфигурации, режим антинейтрино

К фоновым событиям относятся неправильно идентифицированные мюоны: NC события, которые в конечном состоянии дают пион, который может быть идентифицирован как электрон; электронные нейтрино/антинейтрино от пучка NuMI.

Способ определения иерархии можно проиллюстрировать следующим образом (рис. 12). На плоскости чисел событий для исчезновения нейтрино / антинейтрино после 6 лет измерения можно условно поставить точку с погрешностью. Положение точки зависит от δ_{CP} . Таким образом, после набора

статистики с той или иной точностью можно будет определить CP-фазу и иерархию.

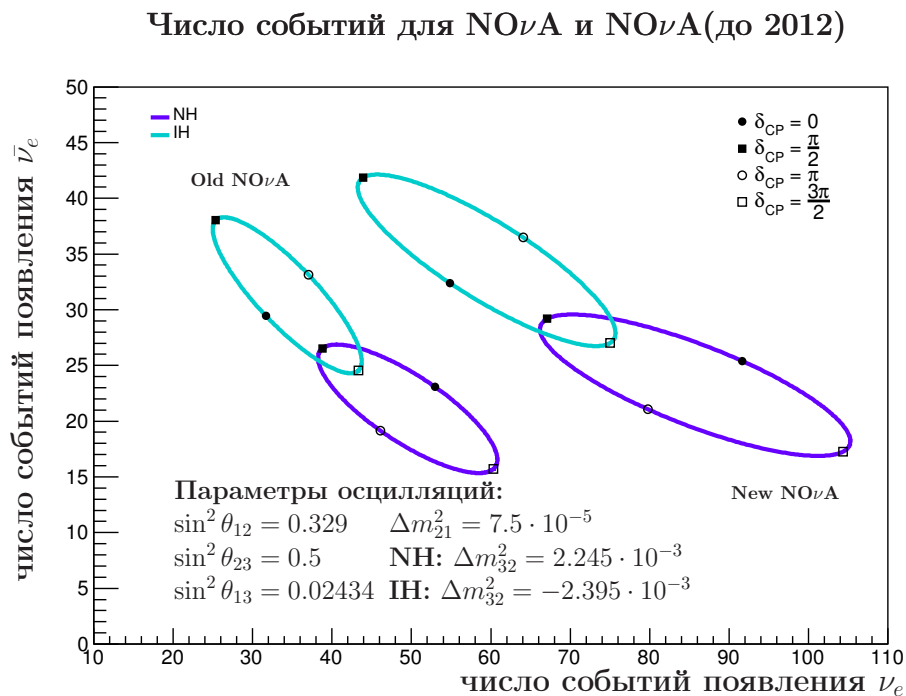


Рисунок 12 — Числа событий в зависимости от значения δ_{CP} для старой и новой конфигурации $NO\nu A$

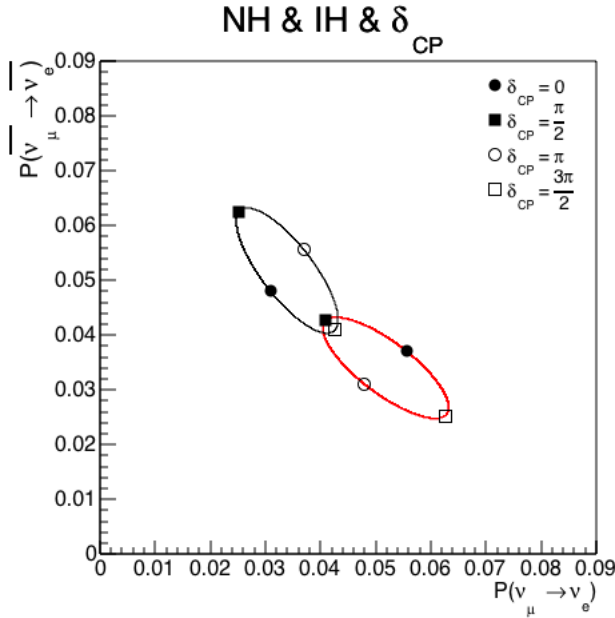
Аналогичный рисунок можно получить в терминах вероятностей осцилляций (рис. 13) (здесь используется формула (44) с $[2\alpha]$, разговор о которой пойдет в следующем разделе). Такого рода картинки встречаются. Но здесь определенная сложность возникает из-за того, что пучок не может быть строго монохроматичным, а вероятность рассчитывается для определенной энергии. Поэтому необходимо учитывать влияние различной энергии на положение эллипсов и, как следствие, точность определения иерархий (рис. 14).

$NO\nu A$ чувствительна к значению угла θ_{13} (через вероятность осцилляций). От его значения зависит степень перекрытия контуров и положение эллипсов. Хотя этот угол был измерен на Daya Bay, можно будет немного уточнить этот результат (рис. 15).

Ранее иерархия и фаза рассматривались в предположении $\sin^2 2\theta_{23} = 1$. Если синус квадрат не максимален, то возникает неопределенность: θ_{23} больше 45° или меньше. Так как $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ пропорционально $\sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13}$, это можно использовать при определении октанта θ_{23} . Использование значе-

ния $\sin^2 2\theta_{23} \neq 1$ приводит к такому результату. Появляется два возможных положения для $\theta_{23} >$ или $< 45^\circ$ (рис. 16).

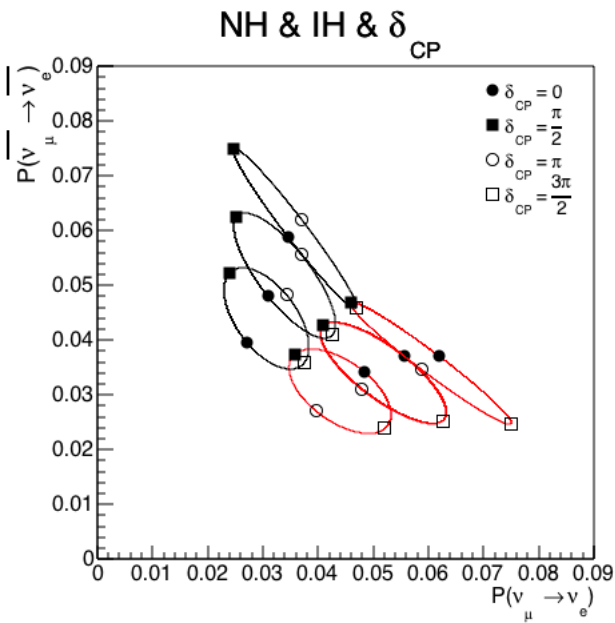
Таким образом в $NO\nu A$ возможно одновременно определить октант θ_{23} , вид иерархии и фазу.



Используется формула [2 α]

Красный цвет — в предположении нормальной иерархии масс, черный — для обратной.

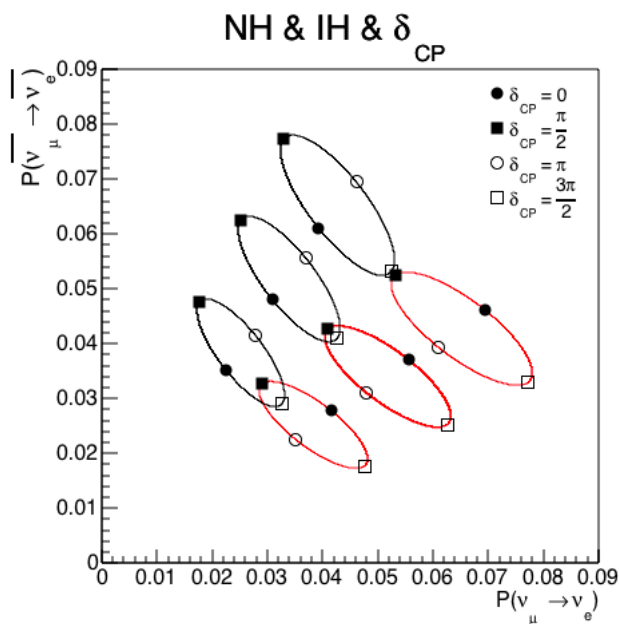
Рисунок 13 — Вероятности осцилляций в зависимости от δ_{CP}



Каждый эллипс с энергией, считая сверху:

- 1) $E = 1.69 GeV$
- 2) $E = 2 GeV$
- 3) $E = 2.28 GeV$

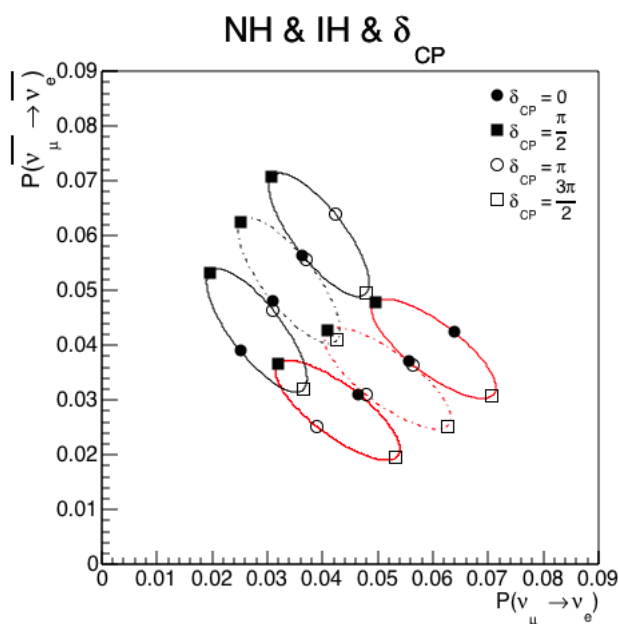
Рисунок 14 — Вероятности осцилляций в зависимости от δ_{CP} , влияние немонохроматичности пучка



Каждый эллипс с θ_{13} , считая сверху:

- 1) $\sin^2 2\theta_{13} = 0.12$
- 2) $\sin^2 2\theta_{13} = 0.095$
- 3) $\sin^2 2\theta_{13} = 0.07$

Рисунок 15 — Вероятности осцилляций в зависимости от δ_{CP} , чувствительность к θ_{13}



$$\sin^2 2\theta_{23} = 0.97$$

Каждый эллипс с θ_{23} , считая сверху:

- 1) $\theta_{23} > \frac{\pi}{4}$
- 2) $\theta_{23} = \frac{\pi}{4}$
- 3) $\theta_{23} < \frac{\pi}{4}$

Рисунок 16 — Вероятности осцилляций в зависимости от δ_{CP} , чувствительность к октанту θ_{23}

Чувствительность $\text{NO}\nu\text{A}$

Чувствительность можно определить как $\sigma = \sqrt{\Delta\chi^2} = \sqrt{\chi_{exp}^2 - \chi_{fit}^2}$. С помощью GLOBES были построены следующие чувствительности (рис. 17, 18):

- Иерархия масс:
 - Нормальная иерархия (NH: $\Delta m_{23}^2 > 0$) или
 - Обратная иерархия (IH: $\Delta m_{23}^2 < 0$);
- CP нарушение: $\delta \neq 0, \pi$;
- Ненулевой θ_{13} : $\theta_{13} \neq 0$.

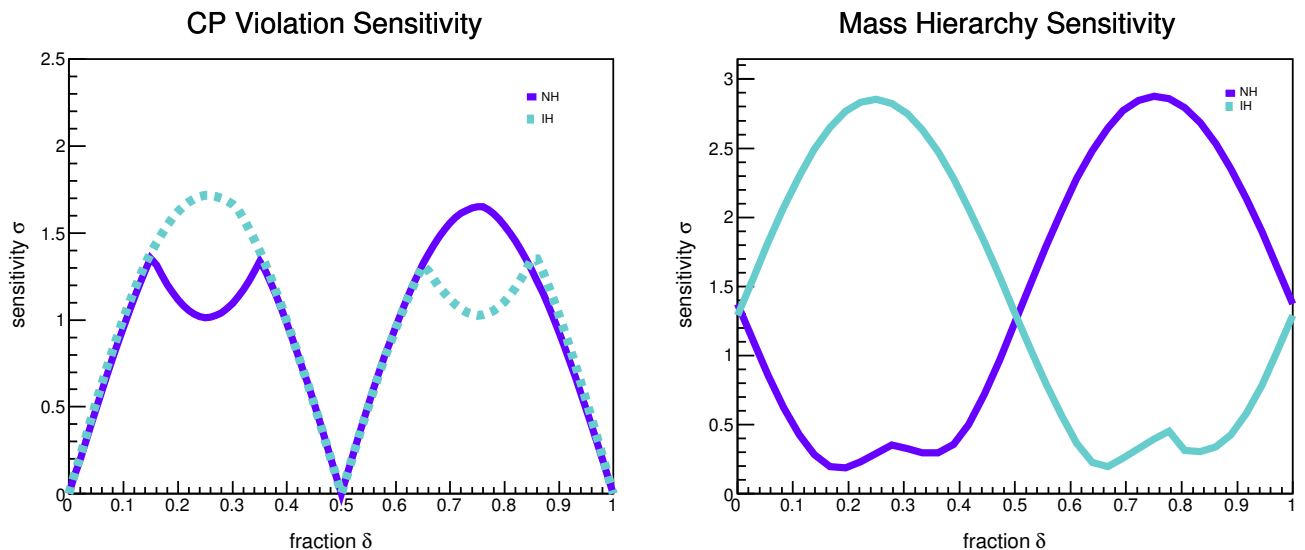


Рисунок 17 — Значение σ , с которым $\text{NO}\nu\text{A}$ сможет определить иерархию и CP нарушение как функция δ . Таким образом иерархию можно определить в 1/3 значений δ с точностью выше 2σ ($\sim 95\%$ CL), для CP нарушения в лучшем случае σ порядка 1.7 ($\sim 92\%$ CL)

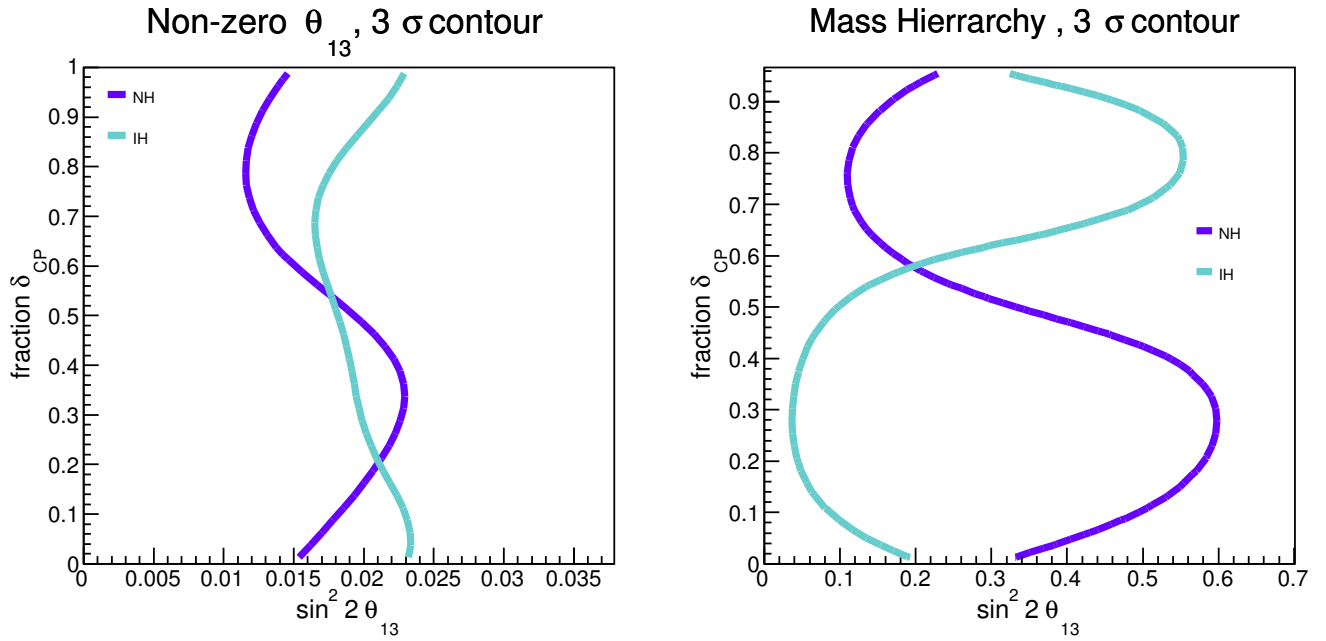


Рисунок 18 — σ для иерархии и ненулевого θ_{13} как функция θ_{13} и δ .

Эти чувствительности строились следующим образом[15]:

- CP нарушение:

Чувствительность оценивается при данном значении δ_{CP} минимизацией χ^2 при заданном фиксированном тестовом значении 0 и π , таким образом определяется две возможности:

$$1) \quad \Delta\chi_0^2 = \chi^2(\delta_{CP} = 0) - \chi_{true}^2;$$

$$2) \quad \Delta\chi_\pi^2 = \chi^2(\delta_{CP} = \pi) - \chi_{true}^2;$$

$$\Delta\chi^2 = \min(\Delta\chi_0^2, \Delta\chi_\pi^2);$$

- угол смешивания θ_{13} :

$$\Delta\chi^2 = |\chi_{true}^2 - \chi_{\theta_{13}=0}^2|;$$

- иерархия масс:

$$\Delta\chi^2 = |\chi_{MH^{exp}}^2 - \chi_{MH^{fit}}^2|$$

Рассматриваются два случая:

- 1) истинная иерархия - нормальная, иерархия фитирования - обратная;
- 2) истинная иерархия - обратная, иерархия фитирования - нормальная.

В дальнейшем речь пойдет именно о чувствительности к иерархии масс нейтрино.

Систематические неопределенности

На результат измерения эксперимента $\text{NO}\nu\text{A}$ влияют как статистические, так и систематические неопределенности. В систематические ошибки войдут неопределенности, связанные с детектированием, а также теоретические ошибки, например, связанные с сечениями, знанием каких-либо параметров эксперимента и ошибки, связанные с обработкой данных.

Вероятности осцилляций

Для подсчета вероятностей можно использовать как точные расчеты, так и приближенные вычисления. Приближенные формулы имеют некоторые преимущества — это и высокая скорость вычисления, и в некоторых случаях очень хорошая близость к точному результату. При фитировании данных во многих экспериментах по нейтринной физике по этим соображениям используются именно приближенные формулы.

Для оценки величины ошибки, связанной с использованием приближенных формул, при фитировании данных, полученных с помощью GLoBES, использовались формулы с первым и вторым порядком по α , а также точная формула. В GLoBES нахождение точной вероятности осуществляется следующим образом:

Для нахождения вероятностей осцилляций в веществе необходимо решить уравнение:

$$i\dot{S}(t) = (UH_0U^\dagger + W(t))S(t) = H(t)S(t).$$

Матрица смешивания в случае трех типов нейтрино:

$$U = \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{23}s_{12} - c_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}.$$

Тогда гамильтониан взаимодействия нейтрино, с учетом эффекта вещества:

$$H = U \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} & \\ & & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} \pm V & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно: "+" для ν ; "-" для $\bar{\nu}$; $V = \sqrt{2}G_f N_e$ - потенциал Михеева-Смирнова-Вольфенштейна (MSW).

В GLoBES вакуумом считается $V < 0.01 \times 7.56 * 10^{-14} \times 0.497$. Тогда вычисление матрицы рассеяния и вероятностей не составляет труда: матрица смешивания остается вакуумной в дальнейших вычислениях $Q = U$, собственные значения $\lambda = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}$.

В веществе Q - эффективная матрица смешивания, λ - собственные значения H , которые ищутся по методу Кардано. Тогда S -матрица:

$$S = Q \begin{pmatrix} e^{-iL\lambda_1} & & \\ & e^{-iL\lambda_2} & \\ & & e^{-iL\lambda_3} \end{pmatrix} Q^\dagger.$$

Вероятность определяется через S -матрицу: $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |S_{\beta\alpha}|^2$.

Формулы с первым и вторым порядком по α получаются из точной формулы разложением по малому параметру $\alpha = \frac{\Delta m_{12}^2}{\Delta m_{13}^2}$ [3,22]:

$[\alpha]$:

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \approx & \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \theta_{23} \frac{\sin^2(A-1)\Delta}{(A-1)^2} + \\ & + 2\alpha \sin \theta_{13} \cos \delta \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \frac{\sin A\Delta \sin(A-1)\Delta}{A(A-1)} \cos \Delta - \\ & - 2\alpha \sin \theta_{13} \sin \delta \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \frac{\sin A\Delta \sin(A-1)\Delta}{A(A-1)} \sin \Delta. \end{aligned} \quad (43)$$

[2 α]:

$$\begin{aligned}
 P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \approx & \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \frac{\sin^2 \Delta(1-A)}{(1-A)^2} + \\
 & + \alpha \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \cos(\Delta \pm \delta_{CP}) \frac{\sin \Delta A \sin \Delta(1-A)}{A(1-A)} + \\
 & + \alpha^2 \cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} \frac{\sin^2 \Delta A}{A^2},
 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\alpha = \frac{\Delta m_{12}^2}{\Delta m_{13}^2}, \quad \Delta \equiv \frac{\Delta m_{13}^2 L}{4E}, \quad A \equiv \pm \frac{G_{fne} L}{\sqrt{2}\Delta}, \quad A\Delta = \frac{L}{3500 \text{ km}}.$$

Тип этих двух формул абсолютно одинаков: эффект вещества кроется в параметре A , а единственное различие заключается только в третьем слагаемом в [2 α]. На первый взгляд все три формулы очень близки (рис. 19, 20).

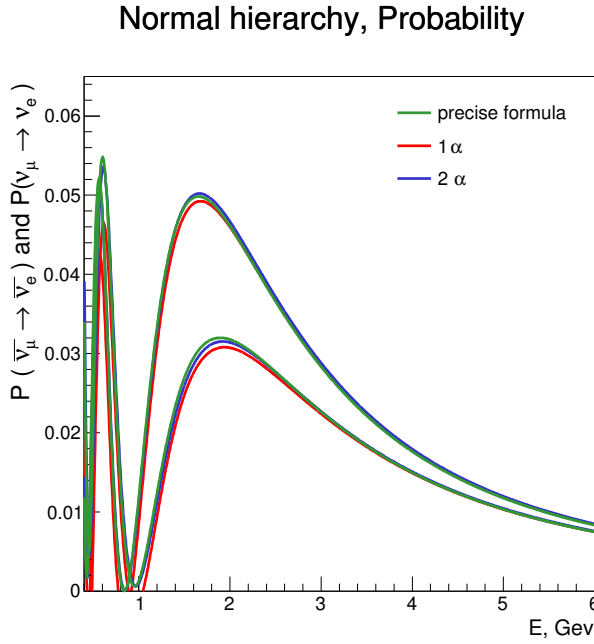


Рисунок 19 — Вероятности осцилляций по трем формулам

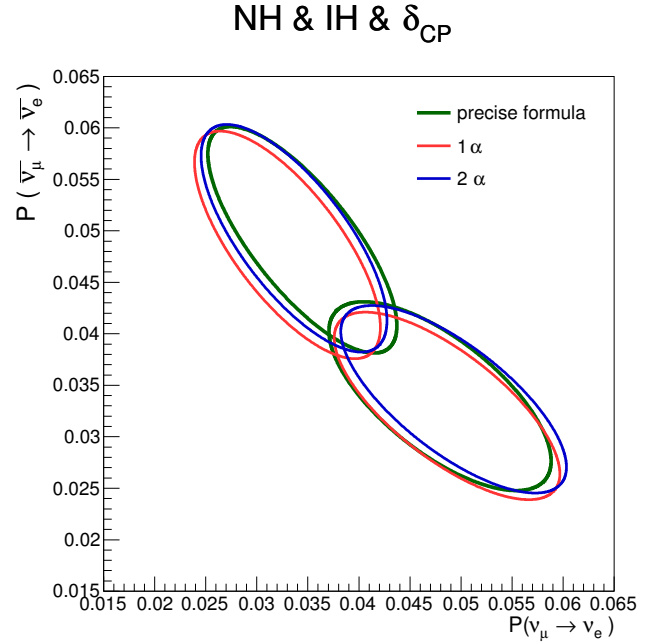


Рисунок 20 — Вероятности осцилляций по трем формулам в зависимости от δ_{CP}

Если по аналогии с предыдущими результатами построить чувствительность для различных приближений (когда истинные значения считаются по точной формуле, а фитирующие значения - из формул различных приближений), то становится видно, что использование разных формул при фитировании дает небольшое расхождение (рис. 21, 22).

Если взять значение $\delta_{CP} = \frac{3\pi}{2}$ (значение фазы из данных Т2К [19]), статистическая ошибка на это значение $\sim 10\%$, ошибка, связанная с применением

приближенных формул $\sim 6\%$.

Чувствительность NO ν A к измерению иерархии

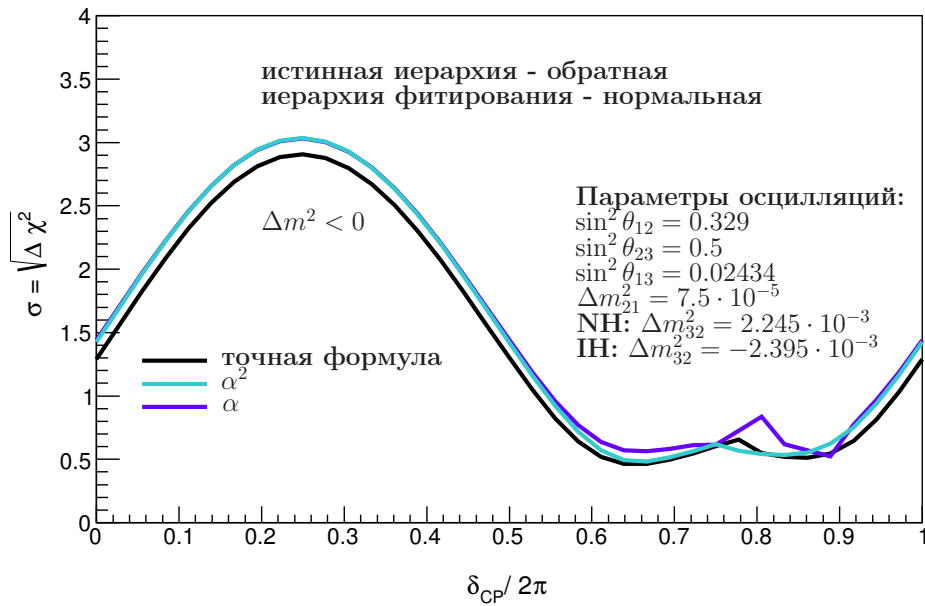


Рисунок 21 — Чувствительность к иерархии в зависимости от δ для трех формул вероятностей.

Чувствительность NO ν A к измерению иерархии

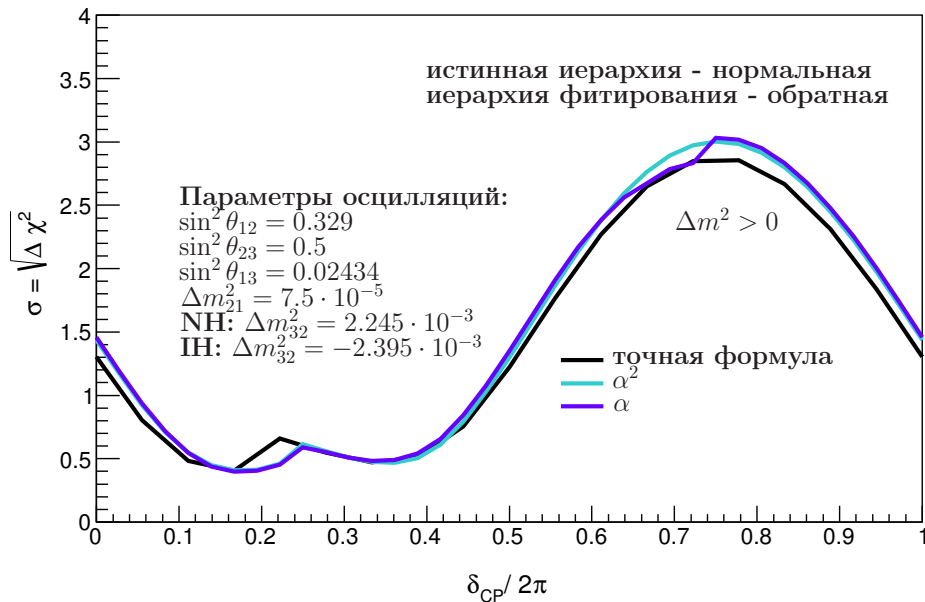


Рисунок 22 — Чувствительность к иерархии в зависимости от δ для трех формул вероятностей.

Плотность вещества

Пучок нейтрино из FNAL пройдет на максимальной глубине 13 км. При осцилляциях в веществе важным параметром является плотность материи. По всем показателям, наиболее привлекательным вариантом была бы постоянная плотность. Согласно модели PREM [23] на такой глубине Земля имеет постоянную плотность. Существуют альтернативные модели, базирующиеся на измерениях плотности (к сожалению, усредненные по всей Земле). Такой моделью, например, является CRUST [20] (рис. 23). Чувствительность эксперимента для разных значений плотности Земли будет иметь небольшое различие: для вариации плотности ошибка не более $\sim 2\%$ (рис. 24).

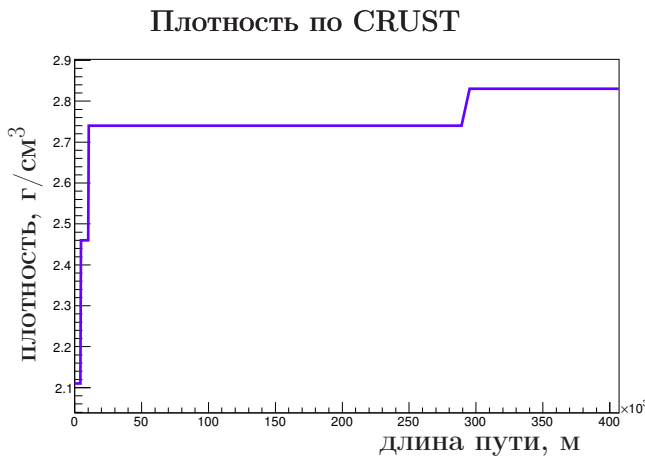


Рисунок 23 — Плотность Земли по модели CRUST на пути пучка

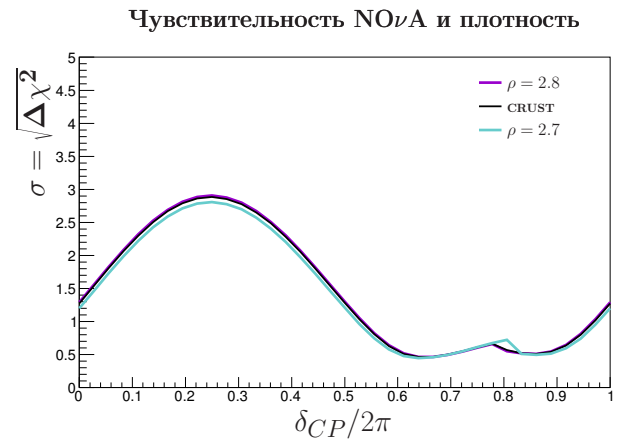


Рисунок 24 — Чувствительность к иерархии для трех плотностей.

Стратегия набора

Эксперимент NOνA будет набирать статистику в течение шести лет в режимах: 3 года $\nu \times 3$ года $\bar{\nu}$. Такое время набора статистики является самым оптимальным для чувствительности. Однако как видно из рис. 25 чувствительность после 3 лет работы в режиме нейтрино будет ниже, чем даже два года в режиме $1\nu \times 1\bar{\nu}$.

Mass Hierarchy Sensitivity

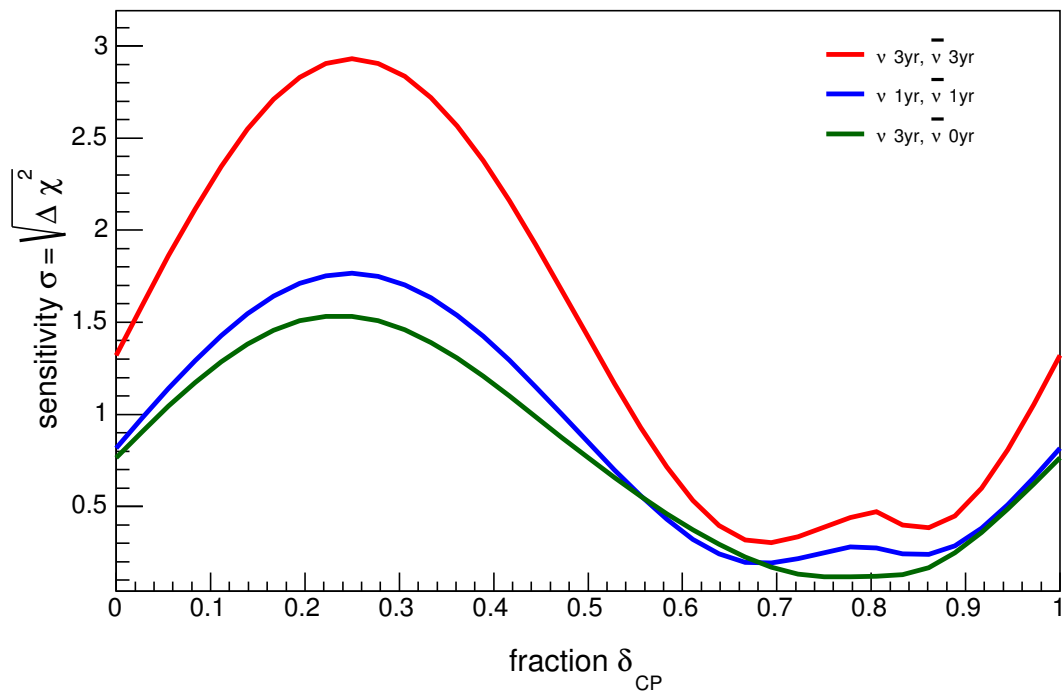


Рисунок 25 — Стратегия набора статистики

ВЫВОДЫ

Автором был разработан программный аппарат с использованием пакета GLOBES для оценки влияния разных факторов на чувствительность эксперимента NO ν A.

- В частности, было показано, что формулы, использующиеся для обработки, могут оказать влияние на результаты эксперимента. Для предварительной оценки и ускорения вычислений можно использовать приближенные формулы, приведенные выше. Однако для получения окончательного значения следует использовать точные вычисления.
- Проведенные расчеты показали, что возможные вариации плотности вещества на пути пучка, оцененные по существующим моделям Земли, оказывают небольшое влияние на чувствительность эксперимента к иерархии масс нейтрино.
- В эксперименте используется схема для 6 лет набора статистики $3\nu \times 3\bar{\nu}$, которая действительно является самой оптимальной для изучения иерархии масс нейтрино и определения CP нарушения в лептонном секторе. Однако, в начале набора статистики работа в течение 2 лет в режимах $1\nu \times 1\bar{\nu}$ является более эффективной, чем непрерывный набор 3ν .

В последнее время в физике нейтрино наблюдается впечатляющий прогресс. Экспериментально открыто явление нейтринных осцилляций, определены параметры матрицы смешивания PMNS, а недавнее измерение ненулевого угла θ_{13} открыло возможность измерения иерархии масс нейтрино и лептонного CP нарушения в осцилляционных экспериментах. После того, как мы поймем порядок расположения нейтринных масс, неопределенность

в значении δ_{CP} значительно снизится. Знание иерархии ограничит область возможного сигнала от безнейтринного двойного бета распада, предназначенного для поиска масштабов масс нейтрино. В сочетании с космологическими измерениями, которые чувствительны к сумме масс нейтрино, информация об иерархии может быть так же использована для определения абсолютной массы нейтрино. Уже по этим причинам определение иерархии масс нейтрино будет важным шагом к завершению Стандартной Модели физики элементарных частиц.

Литература

- [1] Bilenky S. Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos, LNP 817, 2010
- [2] Биленький С.М. Массы, смешивание и осцилляции нейтрино, УФН 173 №11, 2003
- [3] Jianming Bian The $NO\nu A$ experiment: overview and status, 2013
- [4] M. C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Thomas Schwetz Updated fit to three neutrino mixing: status of leptonic CP violation
- [5] G.L. Fogli, E. Lisi Getting the most from the statistical analysis of solar neutrino oscillations
- [6] M.Messier <http://enrico1.physics.indiana.edu/messier/off-axis/spectra/>
- [7] M.Messier Evidence for neutrino mass from observations of atmospheric neutrinos with Super-Kamiokande
- [8] Paschos, E. A. and Yu, J. Y. Neutrino Interactions In Oscillation Experiments
- [9] P. Huber, M. Lindner and W. Winter Simulation of long baseline neutrino oscillation experiments with GLoBES
- [10] P. Huber, M. Lindner, T. Schwetz, and W. Winter, First hint for CP violation in neutrino oscillations from upcoming superbeam and reactor experiments
- [11] The NOvA Collaboration $NO\nu A$ Proposal to Build a 30 Kiloton Off-Axis Detector to Study Neutrino Oscillations in the Fermilab NuMI Beamline

- [12] T. Yang and S. Wojcicki, Study of physics sensitivity of ν_μ disappearance in a totally active version of nova detector
- [13] S. Prakash, S. K. Raut, and S. U. Sankar, Getting the Best Out of T2K and NO ν A
- [14] S. Agarwalla, S. Prakash S. Uma Sankar Resolving the octant of θ_{23} with T2K and NO ν A
- [15] Soumya C., K. N. Deepthi and R. Mohanta Revisiting the sensitivity studies for leptonic CP violation and mass hierarchy with T2K, NO ν A and LBNE experiments
- [16] R. B. Patterson The NO ν A experiment: status and outlook
- [17] Rabindra N. Mohapatra Physics of Neutrino Mass
- [18] R. N. Cahn, D. A. Dwyer, W. C. Haxton White Paper: Measuring the Neutrino Mass Hierarchy
- [19] David Hadley on behalf of the T2K collaboration Highlights from T2K
- [20] Bassin, C., Laske, G. and Masters, G., The Current Limits of Resolution for Surface Wave Tomography in North America, EOS Trans AGU, 81, F897, 2000.
- [21] M. C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Thomas Schwetz Updated fit to three neutrino mixing: status of leptonic CP violation
- [22] The MINOS Collaboration Combined analysis of ν_μ disappearance and ν_e appearance in MINOS using accelerator and atmospheric neutrinos
- [23] A. Dziewonski, D. Anderson Preliminary Reference Earth Model