Осцилляции нейтрино в квантовой теории поля

Наумов Д. В., Потапова И. В.

Лаборатория ядерных проблем

XIV научная конференция «ОМУС 2010»
1-6 февраля 2010 г.

План

- Описание осцилляций нейтрино
  - Квантовая механика
  - Противоречия и недостатки
  - Квантовая теория поля. Волновые пакеты
- Пропагатор нейтрино в веществе

Состояние нейтрино с определенным флейвором:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}|\nu_i\rangle,$$

где $\alpha = e, \mu, \tau, \quad i = 1, 2, 3.$
Эволюция во времени:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i V_{\alpha i} e^{-\frac{i}{\hbar}H_i t}|\nu_i(0)\rangle.$$

Амплитуда перехода $|\nu_\alpha\rangle \to |\nu_\beta\rangle$:

$$A_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = \langle \nu_\alpha|\nu_\beta(t)\rangle = \sum_i V_{\alpha i} V^*_{\beta i}\, e^{iE_i t}$$

Рассмотрим случай двухнейтринных осцилляций. Матрица смешивания имеет вид:

$$V = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

θ - угол смешивания.

Состояния $|\nu_e\rangle$ и $|\nu_\mu\rangle$ в массовом базисе задаются в виде:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos\theta\,|\nu_1\rangle + \sin\theta\,|\nu_2\rangle, \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin\theta\,|\nu_1\rangle + \cos\theta\,|\nu_2\rangle. \end{aligned}$$

Вероятность перехода электронного нейтрино в мюонное:

$$P_{\nu_e\to\nu_\mu}(x) = |A_{\nu_e\to\nu_\mu}|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2\frac{1}{2}(E_2 - E_1)t.$$

Для ультрарелятивистского предела

$$E_2 - E_1 = \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2} - \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2} = \frac{\Delta m_{21}^2}{2p},$$

$$t \approx x.$$

Вероятность равна

$$P_{\nu_e \to \nu_\mu} = sin^2 2\,\theta\, sin^2 \frac{\pi x}{L},$$

где $L = \dfrac{4\pi p}{\Delta m^2}$ - длина осцилляций.

Уравнение Шредингера на состояние ψ_f:

$$i\frac{\partial\psi_f}{\partial t} = (V\hat{H}V^\dagger + W)\psi_f.$$

Для двухнейтринного случая

$$H = \begin{pmatrix} p + \frac{m_1^2}{2p} & 0 \\ 0 & p + \frac{m_2^2}{2p} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_Z + W_e, & 0 \\ 0 & W_z. \end{pmatrix}$$

решение уравнения:

$$\begin{cases} \psi_m^{(1)} = e^{i\tilde{H}_{11}t}\,\psi^{(1)}(0) \\ \psi_m^{(2)} = e^{i\tilde{H}_{22}t}\,\psi^{(2)}(0) \end{cases}$$

Собственные состояния нейтрино в веществе:

$$|\nu_{1\mu}\rangle = |\nu_e\rangle cos\,\theta_m - |\nu_\mu\rangle sin\,\theta_m = |\nu_1\rangle cos\,(\theta_m - \theta) - |\nu_2\rangle sin\,(\theta_m - \theta),$$
$$|\nu_{2\mu}\rangle = |\nu_e\rangle sin\,\theta_m + |\nu_\mu\rangle cos\,\theta_m = |\nu_1\rangle sin\,(\theta_m - \theta) + |\nu_2\rangle cos\,(\theta_m - \theta).$$

В предположении постоянной плотности N_e вероятность перехода электронного нейтрино в мюонное:

$$P_{\nu_e\to\nu_\mu}(x) = sin^2\,2\theta_m\,sin^2\frac{\pi x}{L_m},$$

характерная длина осцилляций в веществе:

$$L_m = L\left[1 + \left(\frac{L}{L_e}\right)^2 + \frac{2L}{L_e}cos\,2\theta\right]^{-1/2}.$$

Противоречия и недостатки

- Скорость нейтрино

$$|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = 1 \longrightarrow \Delta\Phi = \frac{\Delta m^2 L}{4p},$$

$$|\vec{V}_1| \neq |\vec{V}_2| \longrightarrow \Delta\Phi = \frac{\Delta m^2 L}{2p}.$$

- Неопределенные энергия и импульс нейтрино

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}|\nu_i\rangle, \qquad \pi \to \mu\nu.$$

- Соотношение неопределенности $\delta x \approx \hbar/p$

Квантовая теория поля. Волновые пакеты

Одночастичные состояния с определенным импульсом и проекцией спина:

$$|\vec{k}, s\rangle = \sqrt{2E_{\vec{k}}}\, a^{\dagger}_{\vec{k}s}|0\rangle$$

с нормой

$$\langle\vec{q}, r|\vec{k}, s\rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{k}}\delta_{sr}\delta\left(\vec{k} - \vec{q}\right).$$

Определим волновой пакет как суперпозицию Фоковских состояний в точке x:

$$|\vec{p}, x, s\rangle = \int \frac{d\vec{k}\,\phi(\vec{k}, \vec{p}, \sigma)e^{i(k-p)x}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}|\vec{k}, s\rangle.$$

$$\lim_{\boldsymbol{\sigma}\to 0}\phi_{sr}(\vec{k}, \vec{p}, \sigma) = (2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}\delta_{sr}\delta(\vec{k} - \vec{p}).$$

Скалярное произведение состояний:

$$\langle \vec{q}, r, y | \vec{p}, s, x \rangle = \delta_{sr} e^{i(qy - px)} \mathcal{D}(\vec{p}, \vec{q}; x - y),$$

$$\mathcal{D}(\vec{p}, \vec{q}; x - y) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}} \phi(\vec{k}, \vec{p}) \phi^*(\vec{k}, \vec{q}) e^{ik(x-y)}.$$

Нормировка не сингулярна, в отличие от плоской волны:

$$\langle \vec{p}, s, x | \vec{p}, s, x \rangle = 2\overline{E}_{\vec{p}} \mathrm{V}(\vec{p}),$$

$\mathrm{V}(\vec{p})$ - трехмерный пространственный объем, занимаемый пакетом:

$$\mathrm{V}(\vec{p}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{|\phi(\vec{k}, \vec{p})|^2}{(2E_{\vec{k}})^2}.$$

Квантовая теория поля. Волновые пакеты

Амплитуда процесса и вероятность для двухнейтринного случая:

$$A = \frac{\langle f|s-1|i\rangle}{\sqrt{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle}},$$

$$|A|^2 \propto \frac{d\Gamma}{d\Omega\, L^2}\, P_{\alpha\beta}\, d\sigma.$$

$$P_{\alpha\beta} = sin^2 2\theta \left(1 - e^{-f_{12}} cos^2 \frac{\Delta m^2 L}{4p}\right).$$

Рассмотрим распространение электронного нейтрино в веществе. Уравнение Дирака для волновой функции нейтрино:

$$\{i\gamma_\mu\partial^\mu - \frac{1}{2}\gamma_\mu(1-\gamma_5)f^\mu - m\}\Psi(x) = 0,$$
$$f^\mu = \frac{G_f}{\sqrt{2}}(1+4sin^2\theta_w)j^\mu, \quad j^\mu = (n, n\mathbf{u}).$$

Здесь n - плотность электронов среды, $\mathbf{u}$ - скорость среды.

$$\{\hat{p} - m - \frac{1}{2}\hat{f}(1-\gamma_5)\}G(p,u) = -1.$$

$$Z = \hat{p} - m - \frac{1}{2}\hat{f}(1-\gamma_5)$$

Наиболее естественным базисом для разложения является γ-матричный базис:

$$S(p,u) = s_1 I + s_2\hat{p} + s_3\hat{u} + s_4\sigma^{\mu\nu}p_\mu u_\nu + s_5 i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}u_\lambda p_\rho + \\ + s_6\gamma^5 + s_7\hat{p}\gamma^5 + s_8\hat{u}\gamma^5,$$

где s_i — Лоренц-инвариантные коэффициенты.

Построим Λ-базис

$$\mathcal{Q}_1 = \Lambda^+ \frac{1+\hat{x}\gamma^5}{2}, \qquad \mathcal{Q}_2 = \Lambda^- \frac{1+\hat{x}\gamma^5}{2},$$
$$\mathcal{Q}_3 = \Lambda^+ \frac{1-\hat{x}\gamma^5}{2}, \qquad \mathcal{Q}_4 = \Lambda^- \frac{1-\hat{x}\gamma^5}{2},$$
$$\mathcal{Q}_5 = \Lambda^+ \frac{\gamma^5+\hat{x}}{2}, \qquad \mathcal{Q}_6 = \Lambda^- \frac{\gamma^5+\hat{x}}{2},$$
$$\mathcal{Q}_7 = \Lambda^+ \frac{\gamma^5-\hat{x}}{2}, \qquad \mathcal{Q}_8 = \Lambda^- \frac{\gamma^5-\hat{x}}{2}$$

с использованием внемассовых проекционных $(\frac{1\pm\hat{x}\gamma^5}{2})$ и нильпотентных $(\frac{\gamma^5\pm\hat{x}}{2})$ операторов соответственно.

Основу составляют операторы $\Lambda^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{\hat{p}}{W})$, причем

$$\Lambda^{\pm}\Lambda^{\pm} = \Lambda^{\pm}, \;\; \Lambda^{\pm}\Lambda^{\mp} = 0, \;\; W = \sqrt{p^2}.$$

Введенный вектор

$$x^{\mu} = b(p^{\mu}(up) - u^{\mu}p^2)$$

обладает свойствами:

$$x^{\mu}p_{\mu} = 0, \qquad x^{\mu}x_{\mu} = b^2p^2[p^2 - (up)^2],$$

где b — нормировочный множитель. Выбирая $b^2 = 1/(p^2[(up)^2 - p^2])$, положим $x^2 = -1$.

	$\mathcal{Q}_1$	$\mathcal{Q}_2$	$\mathcal{Q}_3$	$\mathcal{Q}_4$	$\mathcal{Q}_5$	$\mathcal{Q}_6$	$\mathcal{Q}_7$	$\mathcal{Q}_8$
$\mathcal{Q}_1$	$\mathcal{Q}_1$	0	0	0	$\mathcal{Q}_5$	0	0	0
$\mathcal{Q}_2$	0	$\mathcal{Q}_2$	0	0	0	$\mathcal{Q}_6$	0	0
$\mathcal{Q}_3$	0	0	$\mathcal{Q}_3$	0	0	0	$\mathcal{Q}_7$	0
$\mathcal{Q}_4$	0	0	0	$\mathcal{Q}_4$	0	0	0	$\mathcal{Q}_8$
$\mathcal{Q}_5$	0	0	0	$\mathcal{Q}_5$	0	0	0	$\mathcal{Q}_1$
$\mathcal{Q}_6$	0	0	$\mathcal{Q}_6$	0	0	0	$\mathcal{Q}_2$	0
$\mathcal{Q}_7$	0	$\mathcal{Q}_7$	0	0	0	$\mathcal{Q}_3$	0	0
$\mathcal{Q}_8$	$\mathcal{Q}_8$	0	0	0	$\mathcal{Q}_4$	0	0	0

Мультипликативные свойства операторов базиса

Уравнение для нахождения значения, обратного данному:

$$(\sum_M \mathcal{Q}_M \bar{S}_M)(\sum_L \mathcal{Q}_L \bar{G}_L) = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_4 = I.$$

Системы уравнений на коэффициенты $\bar{G}_L$:

$$\begin{cases} \bar{S}_5 \bar{G}_8 + \bar{S}_1 \bar{G}_1 = 1, \\ \bar{S}_8 \bar{G}_1 + \bar{S}_4 \bar{G}_8 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{S}_6 \bar{G}_7 + \bar{S}_2 \bar{G}_2 = 1, \\ \bar{S}_7 \bar{G}_2 + \bar{S}_3 \bar{G}_7 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{S}_7 \bar{G}_6 + \bar{S}_3 \bar{G}_3 = 1, \\ \bar{S}_6 \bar{G}_3 + \bar{S}_2 \bar{G}_6 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{S}_8 \bar{G}_5 + \bar{S}_4 \bar{G}_4 = 1, \\ \bar{S}_5 \bar{G}_4 + \bar{S}_1 \bar{G}_5 = 0. \end{cases}$$

Выражения для $\bar{G}_i$:

$$\bar{G}_1 = -\bar{S}_4/\Delta_1, \quad \bar{G}_2 = -\bar{S}_3/\Delta_2, \quad \bar{G}_3 = -\bar{S}_2/\Delta_2, \quad \bar{G}_4 = -\bar{S}_1/\Delta_1,$$
$$\bar{G}_5 = \bar{S}_5/\Delta_1, \quad \bar{G}_6 = \bar{S}_6/\Delta_2, \quad \bar{G}_7 = \bar{S}_7/\Delta_2, \quad \bar{G}_8 = \bar{S}_8/\Delta_1.$$

$$\Delta_1 = \bar{S}_8\bar{S}_5 - \bar{S}_4\bar{S}_1, \quad \Delta_2 = \bar{S}_7\bar{S}_6 - \bar{S}_3\bar{S}_2.$$

Тогда функция Грина в веществе имеет вид:

$$G_{matt} = \frac{-(p^2 - m^2)(\hat{p} + m) + \hat{f}(\hat{p} - m)P_L(\hat{p} + m) - f^2\hat{p}P_L + 2(fp)P_R(\hat{p} + m)}{(p^2 - m^2)^2 - 2(fp)(p^2 - m^2) + f^2p^2},$$

где

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5).$$

Заключение

Расмотрен квантомеханический подход к описанию осцилляций нейтрино, перечислены его недостатки. Предложена теория волновых пакетов. Решена вспомогательная задача по обращению пропагатора нейтрино, котораю в дальнейшем планируется использовать в рамках теории с волновыми пакетами.