Канонические преобразования в QFT. Применение к термополевой динамике (TFD) и теории нейтринных осцилляций.

С.Э. Коренблит

Иркутский государственный университет

July 9, 2013

План

- Канонические преобразования в CM и QM
- Неэквивалентные представления CCR и CAR
- Свободные поля, взаимодействующие поля, и DM
- УНП и SSB
- Преобразования Боголюбова и TFD
- Термополевая бозонизация в модели Тирринга
- Осцилляции нейтрино

Источники: Умедзава Х., Мацумото Х., Татики М., Термополевая динамика и конденсированные состояния, Мир, 1984. Э. Хенли, В. Тирринг, Элементарная квантовая теория поля, ИЛ, 1963. Л.Д. Фаддеев, О.А. Якубовский, Лекции по квантовой механике, ЛГУ, 1980. M. Blasone, Canonical transformations in quantum field theory. Lectures notes; работы M. Blasone at al.: M. Blasone, P. A. Henning, G. Vitiello, hep-th/9803157. Ojima I., Ann. of Phys. **137**, 1981, 1. Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., Tanaev A.B., Jour. Nonlin. Math. Phys. 1997, **4**, p. 492. S.E. Korenblit, V.V. Semenov, Phys. Part. Nucl. Lett., 2011, **8**, p.779; Изв. вуз. Физика. 2012, **55**, с. 31; (arXiv: hep-th/1108.5392; hep-th/1109.2278; hep-th/1210.7452).

Канонические преобразования в CM и QM

Классическая механическая (CM) система с функцией Гамильтона $H(X)$ и s степенями свободы обобщенных координат и импульсов, задающих ее фазовую точку $\{q_i^t,\, p_i^t\}_{i=1}^{s} = \left\{x_1^t, \ldots, x_s^t, x_{s+1}^t, \ldots, x_{2s}^t\right\} = \{x_j^t\}_{j=1}^{2s} \equiv X^t$ в $2s$ - мерном фазовом пространстве, описывается системой $2s$ гамильтоновых уравнений, определяющих скорость перемещения этой точки:

$$\dot{\boldsymbol{X}}^t \equiv \begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H(X)}{\partial p_i} \\ \\ -\dfrac{\partial H(X)}{\partial q_i} \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{\mathcal{V}}(X^t) = \left\{H(X^t), \boldsymbol{X}^t\right\}_{qp}, \tag{1}$$

$$\text{или:}\quad \dot{x}_\ell^t = \mathcal{J}_{\ell j}\frac{\partial H(X)}{\partial x_j}, \quad \boldsymbol{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{I} \mapsto (s \times s), \tag{2}$$

$$\{g, f\}_{qp} = -\{f, g\}_{qp} = \sum_{\ell, j=1}^{2s} \frac{\partial f}{\partial x_\ell}\mathcal{J}_{\ell j}\frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad \text{- скобка Пуассона.} \tag{3}$$

Канонические преобразования в CM и QM

Ее решения: $q_i \Rightarrow q_i^t = \widetilde{q}_i(X^0, t)$, $p_i \Rightarrow p_i^t = \widetilde{p}_i(X^0, t)$, то есть: $X^t = \boldsymbol{\mathcal{G}}_t(X^0)$, зависят от начальных данных: $X^0 = (q_i^0,\, p_i^0)_{i=1}^s$ при $t = t_0$, например, при $t_0 = 0$.

Используя явные выражения (1) для $2s$ компонент векторного поля *скоростей* фазовой точки $\boldsymbol{\mathcal{V}}(X^t)$, легко найти уравнение Гамильтона для любой *независящей явно* от t динамической величины $b(X) \Rightarrow b(X^t)$:

$$\frac{db(X^t)}{dt} = \sum_{j=1}^{2s} \dot{x}_j^t \, \frac{\partial b(X^t)}{\partial x_j^t} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i^t} \frac{\partial b}{\partial q_i^t} - \frac{\partial H}{\partial q_i^t} \frac{\partial b}{\partial p_i^t} \right) \Longrightarrow \tag{4}$$

$$\Longrightarrow \dot{b} = \left(\boldsymbol{\mathcal{V}}(X^t) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{X^t} b(X^t)\right) \equiv \left\{H(X^t), b(X^t)\right\}_{qp}. \tag{5}$$

Преобразования $x_j \underset{\mathcal{M}}{\longmapsto} \xi_\ell(X)$, не меняющие формы гамильтоновых уравнений (1)–(5), – *канонические*, удовлетворяют условиям: $\det|\boldsymbol{\mathcal{M}}| \neq 0$, где матрица:

$$\mathcal{M}_{\ell j} = \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_j}, \quad \dot{\xi}_k = \mathcal{M}_{k\ell} \mathcal{J}_{\ell j} \mathcal{M}_{rj} \frac{\partial H}{\partial \xi_r}, \quad \text{т.е.: } \boldsymbol{\mathcal{M}} \boldsymbol{\mathcal{J}} \boldsymbol{\mathcal{M}}^\top \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{J}}. \tag{6}$$

Канонические преобразования в CM и QM

Существование таких преобразований означает эквивалентность различных наборов $X^t = \{x_j\}_{j=1}^{2s}$ и $\Xi^t = \{\xi_\ell\}_{\ell=1}^{2s}$ канонических переменных и позволяет “стереть” индексы $\{qp\}$ у скобок Пуассона в (1)–(5). Линейные $\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\mathcal{M}X}$ образуют группу симплектических преобразований.

В QM алгебра наблюдаемых реализуется уже НЕ функциями $f(X)$ на фазовом пространстве X, а самосопряженными операторами $\widehat{f} \in \mathcal{A}$ и допускает существование неизмеримых одновременно - некоммутирующих между собой наблюдаемых величин. При этом переход к QM сохраняет алгебраическую структуру CM путем замены скобок Пуассона коммутаторами – CCR, а уравнений Гамильтона (5), – уравнениями Гейзенберга:

$$\{g,f\} \mapsto \frac{i}{\hbar}\left[\widehat{g},\widehat{f}\right], \quad \delta_{ik} = \{p_i,q_k\} \mapsto \frac{i}{\hbar}[\widehat{p}_i,\widehat{q}_k], \quad \dot{\widehat{b}} = \frac{i}{\hbar}\left[\widehat{H},\widehat{b}\right]. \quad (7)$$

CCR в (7), $[\widehat{g},\widehat{f}] = \widehat{g}\widehat{f} - \widehat{f}\widehat{g}$, не зависят от $\widehat{H}$-на, т.е. от динамики и чисто алгебраически определяют набор канонических переменных $(\widehat{q}_i,\,\widehat{p}_i)_{i=1}^{s} \in \mathcal{A}$, которые полностью задают систему в данный момент времени в том смысле, что в этот момент через них выражается любая физическая

Неэквивалентные представления CCR и CAR

- Однако, чтобы описать эволюцию квантовой системы во времени, необходимо задать конкретное представление этих канонических переменных операторами в гильбертовом пространстве – представление CCR.
- В QM систем с конечным числом степеней свободы теорема Von Neumann утверждает унитарную эквивалентность всех неприводимых представлений CCR для данной квантовой системы. Т.е. выбор представления несущественнен для физики и определяется только соображениями удобства.
- Ситуация принципиально меняется для систем с бесконечным числом степеней свободы – в QFT, в частности, если интересоваться величинами, конечными в термодинамическом пределе: $N \to \infty$, $V \to \infty$, типа плотности, $\overline{n} = N/V = \text{const}$.
- В отличии от QM теорема Von Neumann не имеет места в QFT и выбор конкретного представления CCR приобретает физическое значение. Математически это проявляется в существовании в QFT *унитарно неэквивалентных представлений (УНП)* CCR.
- Неэквивалентные представления CCR возникают в QFT в результате *несобственных* канонических преобразований.

Неэквивалентные представления CCR и CAR

Представление Фока: один квантовый осциллятор с $\omega_1 = \omega$:

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1, \;\; a\,|0\rangle = 0, \;\; |n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^\dagger)^n\,|0\rangle, \qquad (8)$$

$$\widehat{H}_1\Psi = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\Psi, \;\; \Psi \in \mathcal{H}[a] = \{\sum_{n=0} c_n|n\rangle, \sum_{n=0}|c_n|^2 < \infty\}. \; (9)$$

Преобразование Боголюбова для когерентных состояний (на группе Гейзенберга-Вейля с алгеброй (8)), или преобразование бозонного сдвига: $a \mapsto a(\theta) = a + \theta$, при $\theta \in C$. Тогда, очевидно:

$$\Big[a(\theta), a^\dagger(\theta)\Big] = 1, \;\; a(\theta)\,|0\rangle = \theta\,|0\rangle, \;\; \exists\,|0(\theta)\rangle: \; a(\theta)|0(\theta)\rangle = 0, \; (10)$$

$$\exists\, U^{-1}(\theta) = \exp\left[-iG(\theta)\right] = U^\dagger, \;\; G(\theta) = i(\theta^* a - \theta a^\dagger) = G^\dagger(\theta): \;\; (11)$$

$$a(\theta) = U^{-1}(\theta) a U(\theta) = a + \theta, \;\; |0(\theta)\rangle = U^{-1}(\theta)\,|0\rangle = \mathrm{CS}(-\theta), \;\; (12)$$

$$\text{нрм. фрм.:} \;\; U^{-1}(\theta) = \exp[-\theta a^\dagger]\exp[-|\theta|^2/2]\exp[\theta^* a], \;\; \text{т.к.:} \; (13)$$

$$a(\theta) \equiv a + U^{-1}[a, U] \equiv a + i\int_0^1 dt\, e^{-itG}\,[a, G]\,e^{itG} \Leftarrow a + \theta, \quad (14)$$

$$\text{и:} \;\; e^{A+B} = e^A e^{-[A,B]/2} e^B, \;\; \text{при:} \;\; [A,[A.B]] = [B,[A.B]] = 0. \; (15)$$

Имеет место “взаимность” вакуумов $|0\rangle$ и $|0(\theta)\rangle$, как $\mathrm{CS}(\pm\theta)$.

Неэквивалентные представления CCR и CAR

"Новый вакуум" есть конденсат a -квантов с плотностью $|\theta|^2$:

$$|0(\theta)\rangle = \exp[-|\theta|^2/2]\exp[-\theta a^\dagger]\,|0\rangle, \quad \langle 0(\theta)|a^\dagger a|0(\theta)\rangle = |\theta|^2, \quad (16)$$

$$\text{задающей: } \langle 0|0(\theta)\rangle = \exp[-|\theta|^2/2] \neq 0, \ \text{т.е.: } |0(\theta)\rangle \in \mathcal{H}[a]. \quad (17)$$

Переход к QFT в два этапа. Сначала система осцилляторов в "ящике" L: $k_n^1 = 2\pi n/L$; затем $L \to \infty$. $\forall\, k_n^1, q_m^1\ :\ a_{k_n^1}|0_{k_n^1}\rangle = 0$,

$$\left[a_{k_n^1}, a^\dagger_{q_m^1}\right] = \delta_{nm} \equiv \delta_{k^1 q^1}, \quad \left[a_{k_n^1}, a_{q_m^1}\right] = 0, \quad |0\rangle \underset{L\to\infty}{\Longleftarrow} \prod_{k_n^1=-\infty}^{\infty} |0_{k_n^1}\rangle, \quad (18)$$

$$a_{k^1} \mapsto a_{k^1}(\theta) = a_{k^1} + \theta_{k^1} \Longleftarrow \mathcal{U}^{-1}(\theta) a_{k^1} \mathcal{U}(\theta), \quad \theta_{k^1} \in C, \quad (19)$$

$$\left[a_{k_n^1}(\theta), a^\dagger_{q_m^1}(\theta)\right] = \delta_{nm}, \quad a_{k^1}(\theta)\,|0\rangle = \theta_{k^1}\,|0\rangle, \quad a_{k^1}(\theta)|0(\theta)\rangle = 0, \quad (20)$$

$$\mathcal{U}^{-1}(\theta) = \mathcal{U}^\dagger(\theta) = \exp\left[-i\mathcal{G}(\theta)\right] = \prod_{k_n^1=-\infty}^{\infty} \exp\left[-iG(\theta_{k_n^1})\right], \quad (21)$$

$$\mathcal{G}(\theta) = \mathcal{G}^\dagger(\theta) = \sum_{k_n^1=-\infty}^{\infty} i\left(\theta^*_{k_n^1} a_{k_n^1} - \theta_{k_n^1} a^\dagger_{k_n^1}\right), \quad |0(\theta)\rangle = \mathcal{U}^{-1}(\theta)|0\rangle, \quad (22)$$

Неэквивалентные представления CCR и CAR

$$\mathcal{U}^{-1}(\theta) = \prod_{k_n^1=-\infty}^{\infty} \exp[-\theta_{k_n^1} a^\dagger_{k_n^1}] \exp[-|\theta_{k_n^1}|^2/2] \exp[\theta^*_{k_n^1} a_{k_n^1}], \qquad (23)$$

Аналогично (16), конденсат "старых" квантов в новом вакууме и наоборот, и перекрытие вакуумов: $\langle 0(\theta)|a^\dagger_{k^1} a_{k^1}|0(\theta)\rangle =$

$$= \langle 0|a^\dagger_{k^1}(\theta) a_{k^1}(\theta)|0\rangle = |\theta_{k^1}|^2, \;\; \langle 0|0(\theta)\rangle = \exp\Big[-\sum_{k_n^1=-\infty}^{\infty} |\theta_{k_n^1}|^2/2\Big]. (24)$$

Переходя от ряда Фурье к интегралу, в пределе $L \to \infty$:

$$\sum_{k_n^1=-\infty}^{\infty} \underset{L\to\infty}{\Longrightarrow} \frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk^1, \quad \frac{L}{2\pi}\delta_{k^1 q^1} \Rightarrow \delta(k^1 - q^1), \quad \frac{L}{2\pi} \Leftarrow \delta(0), \qquad (25)$$

$$a_{k^1}(\theta) \Rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{L}}\alpha_{k^1}(\vartheta), \;\; \theta_{k^1} \Rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{L}}\vartheta_{k^1}, \;\; \alpha_{k^1}(\vartheta) = \alpha_{k^1} + \vartheta_{k^1}, \qquad (26)$$

$$\Big[\alpha_{k^1}(\vartheta), \alpha^\dagger_{q^1}(\vartheta)\Big] = \delta(k^1 - q^1), \;\; \mathcal{U}^{-1}(\vartheta) = \exp\left[-i\mathcal{G}(\vartheta)\right], \qquad (27)$$

$$\mathcal{G}(\theta) \underset{L\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{G}(\vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} dk^1 i\Big(\vartheta^*_{k^1}\alpha_{k^1} - \vartheta_{k^1}\alpha^\dagger_{k^1}\Big), \;\; |0(\theta)\rangle \underset{L\to\infty}{\Longrightarrow} |0(\vartheta)\rangle, (28)$$

Неэквивалентные представления CCR и CAR

вместо (19)–(24) получим соответственно:

$$\alpha_{k^1}(\vartheta) = \mathcal{U}^{-1}(\vartheta)\alpha_{k^1}\mathcal{U}(\vartheta), \quad |0(\vartheta)\rangle = \mathcal{U}^{-1}(\vartheta)\,|0\rangle, \tag{29}$$

$$\mathcal{U}^{-1}(\theta) \underset{L\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{U}^{-1}(\vartheta) = \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty} dk^1 \vartheta_{k^1}\alpha^\dagger_{k^1}\right] \cdot \tag{30}$$

$$\cdot \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty} dk^1 |\vartheta_{k^1}|^2/2\right] \exp\left[\int_{-\infty}^{\infty} dk^1 \vartheta^*_{k^1}\alpha_{k^1}\right], \tag{31}$$

$$\langle 0(\vartheta)|\alpha^\dagger_{k^1}\alpha_{k^1}|0(\vartheta)\rangle = \langle 0|\alpha^\dagger_{k^1}(\vartheta)\alpha_{k^1}(\vartheta)|0\rangle = |\vartheta_{k^1}|^2, \tag{32}$$

$$\langle 0|0(\vartheta)\rangle = \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty} dk^1 |\vartheta_{k^1}|^2/2\right] \equiv \exp\,[-\mathcal{N}/2]. \tag{33}$$

$\langle 0|0(\vartheta)\rangle \Rightarrow 0$, если полное число α_{k^1} - квантов в конденсате, $\mathcal{N} = \infty$. Так, для однородного конденсата $\vartheta_{k^1} = \overline{\vartheta}\delta(k^1)$:

$$\mathcal{N} = \sum_{k^1_n=-\infty}^{\infty} \langle 0(\theta)|\widehat{\mathrm{n}}_{k^1_n}|0(\theta)\rangle \underset{L\to\infty}{\Longrightarrow} \frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk^1 |\theta_{k^1}|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk^1 |\vartheta_{k^1}|^2 = \overline{\vartheta}^2 \frac{L}{2\pi},$$

где $\widehat{\mathrm{n}}_{k^1} = a^\dagger_{k^1} a_{k^1}$. При этом плотность конденсата $\mathcal{N}/L = \overline{\vartheta}^2/2\pi$ остается конечной: $\overline{\vartheta}^2\delta(0) \Rightarrow \overline{\vartheta}^2 L/2\pi$, т.к. $L = 2\pi\delta(0)$.

Неэквивалентные представления CCR и CAR

Представления CCR (27) с $\vartheta = 0$ над $|0\rangle$, и с $\vartheta \neq 0$ над $|0(\vartheta)\rangle$, при $\mathcal{N} = \infty$, неэквивалентны и связаны *несобственным – псевдоунитарным преобразованием* (27)=(30), (31).
На языке полей бозонное преобразование (19), (26), при $c_{k^1} = a_{k^1}\sqrt{2k^0 L} = \alpha_{k^1}\sqrt{2k^0 2\pi}$, и $k^0 = \omega_{k^1} \Rightarrow \sqrt{(k^1)^2 + m^2}$,

$$\left[c_{k^1}(\vartheta), c^\dagger_{q^1}(\vartheta)\right] = 4\pi k^0 \delta(k^1 - q^1), \text{ имеет вид: } x^\nu = (x^0, x^1), \quad (34)$$

$$\varphi_\vartheta(x) = \varphi(x) + \varrho(x), \text{ где: } (kx) = k^0 x^0 - k^1 x^1, \quad (35)$$

$$\varphi_\theta(x) = \sum_{k^1_n = -\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k^0 L}} \left[e^{-i(kx)} a_{k^1}(\theta) + e^{i(kx)} a^\dagger_{k^1}(\theta)\right] \underset{L\to\infty}{\Longrightarrow} \quad (36)$$

$$\underset{L\to\infty}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^1}{\sqrt{2\pi 2k^0}} \left[e^{-i(kx)} \alpha_{k^1}(\vartheta) + e^{i(kx)} \alpha^\dagger_{k^1}(\vartheta)\right] = \varphi_\vartheta(x) = \quad (37)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^1}{4\pi k^0} \left[e^{-i(kx)} c_{k^1}(\vartheta) + e^{i(kx)} c^\dagger_{k^1}(\vartheta)\right] \equiv \varphi^{(+)}_\vartheta(x) + \varphi^{(-)}_\vartheta(x), \quad (38)$$

$$c_{k^1}(\vartheta) = c_{k^1} + \vartheta_{k^1}\sqrt{4\pi k^0}, \quad \mathcal{G}(\vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \varphi(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \varrho(x), \quad (39)$$

где предполагается аналогичная $\varphi(x)$ Фурье-разложимость классического решения уравнений движения:

$$\varrho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^1}{\sqrt{2\pi 2k^0}} \left[e^{-i(kx)} \vartheta_{k^1} + e^{i(kx)} \vartheta^*_{k^1} \right]. \qquad (40)$$

Однако (27), (35) имеют смысл и в отсутствие разложения (40), с учетом (39), (38), с использованием CCR в виде:

$$[\varphi(x), \partial_0 \varphi(y)]\Big|_{x^0=y^0} = i\delta(x^1 - y^1). \qquad (41)$$

Преобразование сдвига бозонного поля (35) и (19), (26) дает известное решение задачи о взаимодействии квантового поля $\psi(x)$ с классическим (квази-)статическим источником $g(x^1)$:

$$H = \int dx^1 \frac{1}{2} \left[(\partial_0 \psi(x))^2 + (\partial_1 \psi(x))^2 + m^2 \psi^2(x) - 2g(x^1)\psi(x) \right], \quad (42)$$

$$2\pi g(x^1) = \int dk^1 e^{ik^1 x^1} g_{k^1}, \quad \text{в виде: } g_{k^1} = \vartheta_{k^1} \sqrt{2\pi 2\omega^3_{k^1}}. \qquad (43)$$

Свободные поля, взаимодействующие поля, и DM

В отличие от свободного – физического (асимптотического) in -поля $\varphi(x) = \varphi^{in}(x)$, гейзенберговское поле $\psi(x) \Rightarrow \varphi_\vartheta(x)$ удовлетворяет уравнению Гейзенберга с источником:

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\varphi^{in}(x) = 0, \quad \left(\partial^2 + m^2\right)\psi(x) = g(x^1), \tag{44}$$

и стремится к in -полю только при адиабатическом выключении источника при $x^0 = t \to \mp\infty$: $g(x^1) \mapsto g(x^1)e^{-\epsilon|t|} = g(x)$, $\epsilon \to +0$, $\psi(x) \underset{t\to-\infty}{\longmapsto} \varphi^{in}(x)$. Формула (35) в виде $\psi(x) = \varphi^{in}(x) + \varrho(x)$, является примером т.н. динамического отображения (DM). Полный гамильтониан (42) в терминах физических in -полей имеет вид их *свободного гамильтониана* H_0^{in}, сдвинутого на константу $W_0 = -\langle 0(\vartheta)|H_0^{in}|0(\vartheta)\rangle$, т.е., $\langle 0(\vartheta)|H|0(\vartheta)\rangle = 0$:

$$H = H_0^{in} + W_0 = \int dk^1 \omega_{k^1} \alpha_{k^1}^\dagger \alpha_{k^1} + W_0, \tag{45}$$

$$W_0 = -\int dk^1 \omega_{k^1} |\vartheta_{k^1}|^2 = -\int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{|g_{k^1}|^2}{2\omega_{k^1}^2}, \tag{46}$$

что отличается от разложения гамиль-на $H = H_0 + H_I$ (42) на "голые": свободный $H_0(t)$ и взаим-вия $H_I(t)$, зависящие от t.

Свободные поля, взаимодействующие поля, и DM

В общем случае “имеется” заранее неизвестный неприводимый полный набор физических in (out) полей $\varphi_i(x)$, включая b.s., представляющих все возможные асимптотические состояния физических частиц, которые затем подвергаются взаимодействию. Эти поля удовлетворяют некоторым линейным *однородным* уравнениям с матричными линейными дифференциальными операторами $\Lambda_i(\partial)$ типа (44):

$$\Lambda_i(\partial)\varphi_i(x) = 0. \tag{47}$$

и не содержат взаимодействия частиц даже с их источником. Поэтому постулируется существование гейзенберговских полей (ГП) $\psi_i(x)$, чьи нелинейные гейзенберговские уравнения (ГУ), с теми же $\Lambda_i(\partial)$, содержат динамику данной QFT в виде функционала $\mathcal{F}_i[\psi_l(x)]$ в роли “источника” (44):

$$\Lambda_i(\partial)\psi_i(x) = \mathcal{F}_i[\psi_l(x)]. \tag{48}$$

Однозначное соответствие между наборами физических полей φ_i и ГП ψ_i необязательно и не имеет места при наличии b.s.

Свободные поля, взаимодействующие поля, и DM

Сепарабельное фоковское пространство $\mathcal{H}[\alpha]$ физических частиц строится повторным действием операторов рождения $\alpha^{\dagger}_{k^1}$ на вакуумное состояние $|0\rangle$: в QM $f < \infty$, а в QFT $f = \infty$,

$$\mathcal{H}[\alpha] \ni |n_{k^1_1}, n_{k^1_2}, \ldots, n_{k^1_j}, \ldots\rangle = \prod_{j=1}^{f} \left(n_{k^1_j}!\right)^{-1/2} \left(\alpha^{\dagger}_{k^1_j}\right)^{n_{k^1_j}} |0\rangle, \quad (49)$$

при $\sum_j n_j < \infty$. Однако (двоичная запись всех вещественных чисел при $n_j = 0, 1$), – полное гильбертово пространство всех состояний данной QFT $\overline{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}[\alpha]$ несчетно – несепарабельно, и для выделения в нем сепарабельного (под) пространства $\mathcal{H}[\alpha]$, связанного с определенным набором физических полей $\varphi_i(x)$, необходимы дополнительные физические условия. Они дают рецепт прочтения формальных ГУ (48) в терминах физических полей $\varphi_i(x)$, в виде динамического отображения (DM):

$$\psi(x) \stackrel{\mathrm{w}}{=} :\Upsilon[\varphi(x)]: , \quad \Lambda_i(\partial)\psi_i(x) \stackrel{\mathrm{w}}{=} :\mathcal{F}[\psi_i(x)]: , \qquad (50)$$

где :...: -нормальное упорядочивание относительно операторов $\alpha^{\#}_{k^1}$ или $c^{\#}_{k^1}$ из $\varphi(x)$ (37)-(39) при $\vartheta = 0$.

Свободные поля, взаимодействующие поля, и DM

Необходимое условие для определения такого отображения, – допустимость представления полного гамильтониана системы, $H = H_0 + H_I$, включавшего в терминах ГП $\psi_i(x)$ свободный гамильтониан $H_0(t)$ и взаимодействие $H_I(t)$, вновь в виде суммы (45) числа и *некоторого свободного гамильтониана* H_0^{in}:

$$H \overset{\mathrm{w}}{=} H_0^{in} + W_0, \quad \text{то есть:} \quad \langle a|H|b\rangle = \langle a|H_0^{in}|b\rangle + W_0\langle a|b\rangle, \qquad (51)$$

но возможного теперь лишь в смысле слабого операторного равенства – в слабом смысле "w": $|a\rangle$ и $|b\rangle$, любые вектора в фоковском пространстве физических in -частиц. В том же слабом смысле понимаются теперь и ГУ и DM в (50), а стало быть, и асимптотическое условие: $\psi(x) \underset{t\to-\infty}{\overset{\mathrm{w}}{\longmapsto}} Z^{1/2}\varphi^{in}(x)$.

Общая форма DM имеет вид разложения Хаага:

$$\psi_i(x) \overset{\mathrm{w}}{=} \chi_i + \sum_r Z_{ir}^{1/2}\varphi_r(x) + \sum_{rk}\int dy\int dz\, F_{irk}^{x,y,z} :\varphi_r(y)\varphi_k(z): + \ldots,$$

χ_i -числовые константы (для бесспиновых полей), Z_{ir} -константы перенормировки, $F_{irk}^{x,y,z}$ -числовые функции. Нормальные произведения полей регулярны в совпадающих точках.

Самосогласованный метод

Таким образом, в QFT имеются с одной стороны физические поля, в терминах которых выражаются все наблюдаемые величины, а с другой стороны ГП, которые несут в себе всю информацию о динамике системы. Реализация ГП путем DM в фоковском пространстве для операторов физических полей необходима чтобы дать им физическую интерпретацию.
Дилемма: для построения фоковского пространства необходим полный набор физических полей, который не известен пока не решены ГУ: он определяется динамикой системы, которая в свою очередь требует знания фоковского пространства состояний физических частиц. Поэтому функции χ_i, Z_{ir}, $F_{irk}^{x,y,z}$ находятся путем самосогласованого решения соответствующих уравнений, возникающих из ГУ, как уравнения для матричных элементов ГП по состояниям выбранных физических полей, при подстановке в них ГП в виде DM. Их решение определяет одновременно коэффициенты DM и энергетический спектр.
Но сначала необходимо на основе физических соображений выбрать/угадать подходящий набор кандидатов на роль физических полей для данной QFT. Если с ним уравнения не имеют решений, процедура повторяется с другим набором.

УНП и SSB

SSB - яркое проявление наличия УНП CCR в QFT, в отличие QM. Любое инвариантное преобразование динамики задает автоморфизм $()'$ алгебры $\mathcal{A}$ канонических переменных, сохраняющий алгебраические операции, а значит и ГУ как алгебраические соотношения между элементами $A, B \in \mathcal{A}$: $(AB)' = A'B'$, $(A^\dagger)' = (A')^\dagger$, и т.д., т.е. является каноническим преобразованием. В QM для любого преобразования точной симметрии $T\!:\mathcal{H} \overset{T}{\mapsto} \mathcal{H}, |a'\rangle = T|a\rangle\!: |\langle a'|b'\rangle|^2 = |\langle a|b\rangle|^2, \forall |a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$. Согласно Вигнеру, любое такое преобразование описывается унитарным или антиунитарным оператором U: $\mathcal{H} \overset{U}{\mapsto} \mathcal{H}$, и неизбежно индуцирует соответствующее ему преобразование $T^{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$ канонических переменных:

$\mathcal{A} \ni A \xmapsto{T^{\mathcal{A}}} A' = U^{-1}AU \in \mathcal{A}$, т.е. является автоморфизмом. В силу теоремы Von Neumann, в QM, и обратно, – всякий автоморфизм оказывается точной симметрией, представимой некоторым оператором U. Однако в QFT, из-за наличия УНП, таких гарантий унитарной реализации любого автомофизма уже нет. Ее отсутствие и отвечает SSB. Поэтому в QFT *точная симметрия* и *инвариантность*, – более уже не синонимы.

УНП и SSB

Для ГП $\psi_i(x)$, заданных Лагранжианом $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\psi, \partial_\nu \psi)$, его вариация при чисто функциональном преобразовании из непрерывной группы $G(\theta^a)$ с параметрами θ^a определяет, с учетом уравнений движения, Нетеровские токи и их заряды:

$$\frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \theta^a} \Rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i)} \frac{\delta \psi_i}{\delta \theta^a} \right] = \partial_\mu J^\mu_a(x), \;\; J^\mu_a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i)} \frac{\delta \psi_i}{\delta \theta^a}, \tag{52}$$

$$Q^a(t) = \int d^3\mathrm{x}\, J^a_0(\mathbf{x}, t), \;\; \frac{d}{dt} Q^a(t) = \int d^3\mathrm{x} \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \theta^a}, \quad \text{что при:} \tag{53}$$

$$\delta \mathcal{L}(x) \Rightarrow 0, \longmapsto [H, Q^a] = 0, \;\; \text{и} \; \exists \left[Q^a, Q^b \right] = i C_{abc} Q^c. \tag{54}$$

Т.е. инвариантность $\mathcal{L} \mapsto$ сохранение зарядов $\mapsto$ базис алгебры группы G, как точной симметрии данной QFT. Необходимое и достаточное условие этого: инвариантность вакуума в смысле

$$Q^a \,|0\rangle = 0, \longmapsto \exists\, U(\theta) = \exp\left[i \theta^a Q^a \right], \;\; U^{-1}(\theta)\,|0\rangle = |0\rangle. \tag{55}$$

УНП и SSB

Если же для некоторого $Q^a \Rightarrow Q$: $Q\,|0\rangle \neq 0$ в представлении $\mathcal{A}$, то $|0\rangle$ в этом представлении не инвариантен относительно преобразований из G, и эта симметрия спонтанно нарушена. Причем $Q(x^0)$ выбрасывает состояния из пространства этого представления, если его вакуум трансляционно инвариантен: $e^{i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{P})}\,|0\rangle = |0\rangle$, и при $x^0 = y^0 = 0$: $J_0(x) = e^{-i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{P})}J_0(0)e^{i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{P})}$,

$$|Q\,|0\rangle|^2 = \langle 0|Q^2\,|0\rangle = \int d^3\mathrm{x}\int d^3\mathrm{y}\,\langle 0|J_0(x)J_0(y)\,|0\rangle = \tag{56}$$

$$= \int d^3\mathrm{z}\,F(\mathbf{z})\int d^3\mathrm{y} = V\int d^3\mathrm{z}\,F(\mathbf{z}) \Longrightarrow \infty,\quad Q\,|0\rangle \notin \mathcal{H},\quad \text{где:} \tag{57}$$

$$\langle 0|J_0(x)J_0(y)\,|0\rangle = \langle 0|J_0(0)e^{i((\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{P})}J_0(0)\,|0\rangle = F(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{58}$$

Природа этой ∞ та же, что и в преобразовании Боголюбова (31), и означает просто переход к другому, УНП-нию CCR и всей алгебры $\mathcal{A}$, – над новыми, вырожденными θ -вакуумами, полученными уже несобственным унитарным преобразованием: $|0(\theta)\rangle = U^{-1}(\theta)\,|0\rangle = exp\,[-i\theta Q]\,|0\rangle \Rightarrow \mathrm{CS}(-\theta)$ (выделение ∞).

Перестройка симметрии

Т.е., SSB предполагает: $[H, Q] = 0$, при $Q\,|0\rangle \neq 0$. При этом в спектре частиц возникает бесщелевое возбуждение - бозон Голдстоуна, обеспечивающий длинноволновые корреляции, поддерживающие стабильность системы в фазе с SSB. Преобразования Голдстоуновского поля контролируют переходы между вырожденными вакуумами УНП. Фундаментальная инвариантность исходной теории при этом не теряется, но оказывается представлена различными типами симметрии на уровне ГП и физических полей наблюдаемых частиц, а связь между различными типами симметрии обеспечивается DM: Пусть ГУ инвариантны относительно непрерывной группы G преобразований ГП, $\psi(x) \to \psi'(x) = G[\psi(x)]$, связанных с физическими полями DM $\psi(x) = \Upsilon[x; \varphi(x)]$. Если существует группа g их преобразований: $\varphi(x) \to \varphi'(x) = g[\varphi(x)]$, такая что:

$$\psi'(x) = G[\psi(x)] \Longrightarrow \Upsilon[x; g[\varphi(x)]] = \Upsilon[x; \varphi'(x)], \qquad (59)$$

и эти группы G и g различны, то имеет место SSB, и соответствующая ему перестройка симметрии G в терминах группы g.

Перестройка симметрии

При SSB относительно фазовых преобразований $\psi \to \psi' = e^{i\theta}\psi$ в модели комплексного скалярного поля имеем Лагранжиан, Гамильтониан, ток и заряд, генерирующий это преобразование:

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\nu \psi) = \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi - \lambda(\psi^\dagger \psi)^2,$$
$$\mathcal{H}(x) = \left[\dot{\psi}^\dagger \dot{\psi} + \left(\boldsymbol{\nabla}\psi^\dagger \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi\right) + m^2 \psi^\dagger \psi + \lambda(\psi^\dagger \psi)^2\right],$$
$$J_\mu(x) = -i\psi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi, \;\; \partial_\mu J^\mu(x) = 0, \;\; Q = \int d^3\mathrm{x}\, J^0(x). \qquad (60)$$

В случае SSB $Q|0\rangle \neq 0$, и набор физических полей включает реальные поля $\rho(x)$ и Голдстоуна $\chi(x)$, $\partial^2\chi(x) = 0$, а DM таково

$$\psi(x) = e^{i\chi(x)/\upsilon} F[\rho(x), \partial\chi], \quad J_\mu(x) = 2\upsilon \partial_\mu \chi(x) + \dots,$$
$$\mathcal{H}(x) = \left[(\dot{\varrho})^2 + (\boldsymbol{\nabla}\varrho)^2 + M^2\varrho^2 + (\dot{\chi})^2 + (\boldsymbol{\nabla}\chi)^2\right] + \dots,$$

что U(1) сим-рия ГП перестроена в сим-рию относительно сдвига поля $\chi(x) \to \chi(x) + \upsilon\theta$, при $\rho(x) = \upsilon + \varrho(x)$, $2\upsilon = \langle \psi + \psi^\dagger \rangle_0$.
В отсутствие SSB $Q|0\rangle = 0$, DM: $\psi(x) = \Upsilon[\varphi(x), \varphi^\dagger(x)]$, $\varphi \overset{?}{\Rightarrow} \rho e^{i\chi}$, $(\partial^2 + m_1^2)\varphi(x) = 0$, $\varphi \to \varphi' = e^{i\theta}\varphi$, $j_\mu(x) = -i\varphi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi \overset{?}{\Rightarrow} 2\rho^2 \partial_\mu \chi$.

Преобразования Боголюбова и TFD

Попытка записать статистическое среднее в виде некоторого вакуумного среднего немедленно приводит к удвоению числа степеней свободы: термополевой вакуум “живет” в прямом тензорном произведении пространств: системы и как бы ее “зеркального” отражения в термостате: $Z(\varsigma) = Tr\{e^{-\varsigma H}\}$, $\varsigma = (k_B T)^{-1}$, $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$,

$$\langle\!\langle A\rangle\!\rangle = Z^{-1} Tr\{e^{-\varsigma H} A\} \stackrel{?}{\Longrightarrow} \langle 0(\varsigma)|A|0(\varsigma)\rangle, \quad \text{или:} \tag{61}$$

$$Z^{-1} \sum_n \langle n|A|n\rangle e^{-\varsigma E_n} \stackrel{?}{\Longrightarrow} \langle 0(\varsigma)|A|0(\varsigma)\rangle, \quad \text{ищем в виде:} \tag{62}$$

$$|0(\varsigma)\rangle = \sum_n |n\rangle f_n(\varsigma), \quad f_n^*(\varsigma) f_m(\varsigma) = Z^{-1} e^{-\varsigma E_n} \delta_{nm}, \tag{63}$$

$$f_n(\varsigma) = Z^{-1/2} e^{-\varsigma E_n/2} |\widetilde{n}\rangle, \quad \widetilde{H}|\widetilde{n}\rangle = E_n|\widetilde{n}\rangle, \quad \langle\widetilde{m}|\widetilde{n}\rangle = \delta_{mn}, \tag{64}$$

$$|0(\varsigma)\rangle = Z^{-1/2} \sum_n e^{-\varsigma E_n/2} |n,\widetilde{n}\rangle, \quad |n,\widetilde{n}\rangle \equiv |n\rangle \otimes |\widetilde{n}\rangle = \begin{pmatrix} |n\rangle \\ |\widetilde{n}\rangle \end{pmatrix}, \tag{65}$$

$$\text{Очевидно:} \quad \widehat{\boldsymbol{H}}|0(\varsigma)\rangle = 0, \quad \widehat{\boldsymbol{H}} = H - \widetilde{H}, \quad \text{при } H, \widetilde{H}|0(\varsigma)\rangle \neq 0, \tag{66}$$

$$\langle 0(\varsigma)|0(\varsigma)\rangle = 1, \quad b|0\rangle = \widetilde{b}|\widetilde{0}\rangle = 0, \quad b(\varsigma)|0(\varsigma)\rangle \stackrel{?}{=} 0 \stackrel{?}{=} \widetilde{b}(\varsigma)|0(\varsigma)\rangle. \tag{67}$$

Преобразования Боголюбова и TFD

Simplest fermionic oscillator: one fixed mode k^1; only two normalized states $|0\rangle$ and $|1\rangle$, with $E_0 = 0$, $E_1 = \omega$, annihilated or created by: $b|0\rangle = 0$, $|1\rangle = b^\dagger|0\rangle$, $\{b, b^\dagger\} = 1$, $\{b, b\} = 0$. Thermal vacuum appears as a normalized sum of tensor products of two independent copies of these states: $|0\widetilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |\widetilde{0}\rangle$, $|1\widetilde{1}\rangle = |1\rangle \otimes |\widetilde{1}\rangle$, weighted with corresponding Gibbs and relative phase factors: for $\{b, \widetilde{b}^\#\} = 0$, $(\widetilde{b}^\# = \widetilde{b}, \widetilde{b}^\dagger)$, $\tan^2 \vartheta(k^1, \varsigma) = e^{-\varsigma\omega}$, $\omega = \omega_{k^1}$:

$$|0(\varsigma)\rangle_{(F)} = \left[|0\widetilde{0}\rangle + e^{i\Phi} e^{-\varsigma\omega/2} |1\widetilde{1}\rangle\right] \left[\langle 0\widetilde{0}|0\widetilde{0}\rangle + e^{-\varsigma\omega} \langle 1\widetilde{1}|1\widetilde{1}\rangle\right]^{-1/2} \equiv \tag{68}$$

$$\equiv \cos\vartheta \left(1 + e^{i\Phi} \tan\vartheta\, b^\dagger \widetilde{b}^\dagger\right) |0\widetilde{0}\rangle = \mathrm{V}^{-1}_{\vartheta(F)} |0\widetilde{0}\rangle, \quad \text{where:} \tag{69}$$

$$G_+ = b^\dagger \widetilde{b}^\dagger, \quad G_- = \widetilde{b} b = (G_+)^\dagger, \quad G_3 = (b^\dagger b - \widetilde{b}\widetilde{b}^\dagger)/2, \tag{70}$$

$$[G_+, G_-] = 2G_3, \quad [G_3, G_\pm] = \pm G_\pm, \quad G_\pm = G_1 \pm iG_2, \tag{71}$$

$$\mathrm{V}^{-1}_{\vartheta(F)} = \exp\left\{\vartheta\left[e^{i\Phi} G_+ - e^{-i\Phi} G_-\right]\right\} = \mathrm{V}_{-\vartheta(F)} = \mathrm{V}^\dagger_{\vartheta(F)} = \tag{72}$$

$$= \exp\left\{e^{i\Phi} \tan\vartheta\, G_+\right\} \exp\left\{-\ln(\cos^2\vartheta)\, G_3\right\} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-e^{-i\Phi} \tan\vartheta\, G_-\right\}, \tag{73}$$

Преобразования Боголюбова и TFD

– is a standard form of operator of the coherent state for group $SU(2)$ allows to identify the algebra (71) as "quasispin" algebra, with the "cold" vacuum as its lowest state $|0\widetilde{0}\rangle \Rightarrow |s,-s\rangle$, for representation with "quasispin" $s=1/2$, and the state $|1\widetilde{1}\rangle \Rightarrow |s,s\rangle$, as the highest one, with: $G_3|s,\pm s\rangle = \pm s|s,\pm s\rangle$, $G_\pm|s,\pm s\rangle = 0$. The unique arisen arbitrary relative phase Φ reflects now the fact that the quantum state is not the vector, rather the ray. The thermal vacuum (69), as a coherent state, is annihilated (67) by operators: $\mathrm{V}^{-1}_{\vartheta(F)} G_- \mathrm{V}_{\vartheta(F)} = \cos^2\vartheta\, G_- + e^{i\Phi}\sin 2\vartheta\, G_3 - e^{2i\Phi}\sin^2\vartheta\, G_+ = \underset{\sim}{b}(\varsigma) b(\varsigma)$,

$$\begin{aligned} b(\varsigma) &= \mathrm{V}^{-1}_{\vartheta(F)}\, b\, \mathrm{V}_{\vartheta(F)} = b\cos\vartheta - \widetilde{b}^\dagger e^{i\Phi}\sin\vartheta, \\ \underset{\sim}{b}(\varsigma) &= \mathrm{V}^{-1}_{\vartheta(F)}\, \widetilde{b}\, \mathrm{V}_{\vartheta(F)} = \widetilde{b}\cos\vartheta + b^\dagger e^{i\Phi}\sin\vartheta. \end{aligned} \tag{74}$$

Up to now $\widetilde{b}^{\#}$ is only notation that does not define any operation. In order to fix it as an operation: $\underset{\sim}{b}(\varsigma) \mapsto \widetilde{b}(\varsigma)$, one should choose the phase Φ, which can not be removed by self consistent redefinition of operators $b, \widetilde{b}$.

Преобразования Боголюбова и TFD

Выбор $\Phi = 0$ ведет к сложным правилам тильда -сопряжения для фермионов, отличающимся от бозонных. Операторы Ожимы отвечают $e^{i\Phi} \Rightarrow -i$, приводя к одинаковым правилам для бозонов и фермионов. Как видим, выбор $e^{i\Phi} = i$, $\Phi = \pi/2$, ни чем не хуже, и также приводит к условиям антилинейного гомоморфизма:

$$(AB)^{\sim} = \widetilde{A}\widetilde{B}, \quad (\alpha A + \beta B)^{\sim} = \alpha^* \widetilde{A} + \beta^* \widetilde{B}, \tag{75}$$

$$(A^{\dagger})^{\sim} = (\widetilde{A})^{\dagger}, \quad \text{и:} \quad (\widetilde{b}(\varsigma))^{\sim} = b(\varsigma), \tag{76}$$

При этом термовакуум, определенный произведением преобразований Боголюбова (72), (73) с различными k^1, оказывается когерентным состоянием, полученным когерентным $SU(2)$-вращением всех вакуумов $|0_{k^1}\widetilde{0}_{k^1}\rangle$ отдельных ферми-осцилляторов, как низших квазиспиновых состояний, вокруг одного и того же единичного вектора $\mathbf{u} = (\sin\Phi, \cos\Phi, 0)$, но на разные углы $= -2\vartheta(k^1, \varsigma)$: $\mathrm{V}^{-1}_{\vartheta(F)} = \exp\left[i2\vartheta\left(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{G}\right)\right]$.

Преобразования Боголюбова и TFD

Аналогично, бозонный термовакуум задан термическим преобразованием Боголюбова $\mathrm{V}_{\vartheta(B)}$, как когерентное состояние для представлений дискретной серии группы $SU(1,1)$:
$[a, a^\dagger] = [\widetilde{a}, \widetilde{a}^\dagger] = 1$, $[a, \widetilde{a}^\#] = 0$, $E_n = n\omega$, $|n\rangle = [\sqrt{n!}]^{-1}(a^\dagger)^n|0\rangle$,
$|\widetilde{n}\rangle = [\sqrt{n!}]^{-1}(\widetilde{a}^\dagger)^n|\widetilde{0}\rangle$, $\omega = \omega_{k^1}$, $\tanh^2\vartheta(k^1, \varsigma) = e^{-\varsigma\omega}$,
$|0\widetilde{0}\rangle \Rightarrow |1/2, 1/2\rangle$, для $\nu \Rightarrow \kappa \equiv 1/2$,

$$|0(\varsigma)\rangle_{(B)} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{i\Phi_n} e^{-n\varsigma\omega/2}|n\widetilde{n}\rangle\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varsigma\omega}\langle n\widetilde{n}|n\widetilde{n}\rangle\right]^{-1/2} \underset{\Phi_n \mapsto n\Phi}{\Longrightarrow} \tag{77}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cosh\vartheta} \exp\left(\tanh\vartheta e^{i\Phi} a^\dagger \widetilde{a}^\dagger\right)|0\widetilde{0}\rangle = \mathrm{V}^{-1}_{\vartheta(k^1)(B)}|0\widetilde{0}\rangle, \tag{78}$$

$$Y_+ = a^\dagger\widetilde{a}^\dagger, \quad Y_- = \widetilde{a}a = (Y_+)^\dagger, \quad Y_0 = (a^\dagger a + \widetilde{\widetilde{a}\widetilde{a}}^\dagger)/2, \tag{79}$$

$$Y_0 = (1 + a^\dagger a + \widetilde{a}^\dagger\widetilde{a})/2, \quad [Y_-, Y_+] = 2Y_0, \quad [Y_0, Y_\pm] = \pm Y_\pm, \tag{80}$$

где κ и $\nu = \kappa + m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, есть собственные значения операторов (Казимира): C_2 и Y_0 этой группы:

Преобразования Боголюбова и TFD

$$C_2 = Y_0^2 - Y_0 - Y_+ Y_- = \frac{1}{4}\left[-1 + (a^\dagger a - \widetilde{a}^\dagger \widetilde{a})^2\right] \Rightarrow \kappa(\kappa - 1)\widehat{I}, \quad (81)$$

$$C_2|\kappa, \nu\rangle = \kappa|\kappa, \nu\rangle, \quad Y_0|\kappa, \nu\rangle = \nu|\kappa, \nu\rangle, \quad (82)$$

$$\mathrm{V}^{-1}_{\vartheta(k^1)(B)} = \exp\left\{\vartheta\left[e^{i\Phi} Y_+ - e^{-i\Phi} Y_-\right]\right\} = \mathrm{V}_{-\vartheta(k^1)(B)} = \quad (83)$$

$$= \mathrm{V}^\dagger_{\vartheta(k^1)(B)} = \exp\left\{\tanh\vartheta e^{i\Phi} Y_+\right\} \exp\left\{-\ln(\cosh^2\vartheta) Y_0\right\} \cdot \quad (84)$$

$$\cdot \exp\left\{-\tanh\vartheta e^{-i\Phi} Y_-\right\}.$$

Числитель в (77) содержит теперь счетное число членов со счетным числом произвольных фаз Φ_n. Когерентное состояние (78), уже для одной осцилляторной моды k^1 возникает только если счетное число раз когерентно выборать: $\Phi_n \mapsto n\Phi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Нет оснований предпочесть такой выбор обычному $\Phi_n \equiv 0$, который приводит к тем же правилам тильда-сопряжения (75), (76) и для бозонов.

Преобразования Боголюбова и TFD

The total thermal transformation is given by infinite product of operators (83), for $a, \widetilde{a} \equiv a_{k^1}, \widetilde{a}_{k^1}$, and the transformed vacuum state is an infinite product of one mode states: $|0(\varsigma)\rangle = \mathcal{V}^{-1}_{\vartheta(B)}|0\widetilde{0}\rangle$,
for: $\tanh^2\vartheta(k^1,\varsigma) = e^{-\varsigma k^0}$, $L \Rightarrow 2\pi\delta(0) \to \infty$, $c_{k^1} \Leftarrow a_{k^1}\sqrt{2k^0 L}$,
$\mathcal{K}_-(k^1) = \widetilde{c}_{k^1} c_{k^1}$, $\mathcal{K}_+(k^1) = c^\dagger_{k^1}\widetilde{c}^\dagger_{k^1}$, $\mathcal{K}_0(k^1) = (c^\dagger_{k^1} c_{k^1} + \widetilde{c}_{k^1}\widetilde{c}^\dagger_{k^1})/2$,

$$\prod_{k^1=-\infty}^{\infty} \mathrm{V}^{-1}_{\vartheta(k^1)(B)} \underset{L\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{V}^{-1}_{\vartheta(B)} = \exp\left\{-\mathcal{X}_\vartheta\right\} = \mathcal{V}^\dagger_{\vartheta(B)}, \tag{85}$$

$$\mathcal{X}_\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^1}{2k^0}\vartheta(k^1,\varsigma)\left[\mathcal{K}_-(k^1) - \mathcal{K}_+(k^1)\right] = \widetilde{\mathcal{X}}_\vartheta, \tag{86}$$

$$\mathcal{V}^{-1}_{\vartheta(B)} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^1}{2k^0}\tanh\vartheta(k^1,\varsigma)\mathcal{K}_+(k^1)\right\}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^1}{2k^0}\ln\left(\cosh^2\vartheta(k^1,\varsigma)\right)\mathcal{K}_0(k^1)\right\}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^1}{2k^0}\tanh\vartheta(k^1,\varsigma)\mathcal{K}_-(k^1)\right\}, \tag{87}$$

Преобразования Боголюбова и TFD

Преобразования, CCR, конденсат и перекрытие вакуумов:

$$
\begin{aligned}
c_{k^1}([\pm]\varsigma) &= \mathcal{V}^{\mp 1}_{\vartheta(B)} c_{k^1} \mathcal{V}^{\pm 1}_{\vartheta(B)} = c_{k^1} \cosh\vartheta \mp \widetilde{c}^{\dagger}_{k^1} \sinh\vartheta, \\
\widetilde{c}_{k^1}([\pm]\varsigma) &= \mathcal{V}^{\mp 1}_{\vartheta(B)} \widetilde{c}_{k^1} \mathcal{V}^{\pm 1}_{\vartheta(B)} = \widetilde{c}_{k^1} \cosh\vartheta \mp c^{\dagger}_{k^1} \sinh\vartheta,
\end{aligned}
\tag{88}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[c_{k^1}([\pm]\varsigma), c^{\dagger}_{q^1}([\pm]\varsigma)\right] &= (2\pi)\left(2k^0\right)\delta\left(k^1 - q^1\right), \\
\left[\widetilde{c}_{k^1}([\pm]\varsigma), \widetilde{c}^{\dagger}_{q^1}([\pm]\varsigma)\right] &= (2\pi)\left(2k^0\right)\delta\left(k^1 - q^1\right),
\end{aligned}
\tag{89}
$$

$$
c_{k^1}([+]\varsigma)|0(\varsigma)\rangle = 0, \quad \widetilde{c}_{k^1}([+]\varsigma)|0(\varsigma)\rangle = 0, \quad k^0 = \omega_{k^1}, \tag{90}
$$

$$
\langle 0(\varsigma)|c^{\dagger}_{k^1} c_{k^1}|0(\varsigma)\rangle = \langle 0\widetilde{0}|c^{\dagger}_{k^1}([+]\varsigma) c_{k^1}([+]\varsigma)|0\widetilde{0}\rangle =
$$

$$
= 4\pi k^0 \delta(0) \sinh^2\vartheta = 2k^0 L(e^{\varsigma k^0} - 1)^{-1}, \quad L = 2\pi\delta(0), \tag{91}
$$

$$
\langle 0\widetilde{0}|0(\varsigma)\rangle = \langle 0\widetilde{0}|\mathcal{V}^{-1}_{\vartheta(B)}|0\widetilde{0}\rangle = \tag{92}
$$

$$
= \exp\left\{-\delta(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dk^1 \ln\left(\cosh\vartheta(k^1,\varsigma)\right)\right\} \underset{L\to\infty}{\Longrightarrow} 0, \tag{93}
$$

что и означает Унитарную Неэквивалентность Представлений QFT при различных температурах.

Преобразования Боголюбова и TFD

"Hot" pseudoscalar field with respect to the "hot" vacuum $|0(\varsigma)\rangle$:

$$\phi(x;[+]\varsigma) = \mathcal{V}^{-1}_{\vartheta(B)}\phi(x)\mathcal{V}_{\vartheta(B)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^1}{2k^0}\left[c_{k^1}([+]\varsigma)e^{-i(kx)} + c^{\dagger}_{k^1}([+]\varsigma)e^{+i(kx)}\right]. \quad (94)$$

Для любого функционала $\mathcal{F}[\Psi]$ от Гейзенберговских полей в заданном представлении физических полей $\psi(x)$, т.е. для заданного DM $\Psi(x) = \Upsilon[\psi(x)]$ при нулевой температуре, интересуясь его вакуумными средними (ВС) по термовакууму:

$$\langle 0(\varsigma)|\mathcal{F}[\Psi(x)]|0(\varsigma)\rangle = \langle 0\widetilde{0}|\mathcal{V}_{\vartheta}\mathcal{F}[\Psi(x)]\mathcal{V}^{-1}_{\vartheta}|0\widetilde{0}\rangle = \quad (95)$$
$$= \langle 0\widetilde{0}|\mathcal{F}\left[\mathcal{V}_{\vartheta}\Psi(x)\mathcal{V}^{-1}_{\vartheta}\right]|0\widetilde{0}\rangle \equiv \langle 0\widetilde{0}|\mathcal{F}[\Psi(x,[-]\varsigma)]|0\widetilde{0}\rangle,$$

приходим к следующему формальному отображению:

$$\Psi(x,[-]\varsigma) = \mathcal{V}_{\vartheta}\Psi(x)\mathcal{V}^{-1}_{\vartheta} = \Upsilon\left[\mathcal{V}_{\vartheta}\psi(x)\mathcal{V}^{-1}_{\vartheta}\right] = \Upsilon[\psi(x,[-]\varsigma)], \quad (96)$$

на "холодные" физические термополя:

$$\psi(x,[-]\varsigma) = \mathcal{V}_{\vartheta}\psi(x)\mathcal{V}^{-1}_{\vartheta}, \quad (97)$$

с теми же коэффициентными функциями, что и в исходном DM $\Psi(x) = \Upsilon[\psi(x)]$.

Преобразования Боголюбова и TFD

Это полностью переносит всю температурную зависимость с состояния термовакуума $|0(\varsigma)\rangle$ на эти "холодные" физические термополя. Однако, для вычисления ВС (95) надо подставить в правую часть уравнений (95), (96) выражения для "холодных" физических термополей (97) снова в терминах исходных физических полей $\psi(x)$ полученных с помощью (88) $[-]$, или аналогичных уравнениям (74) (но не таких же точно!), и вновь переупорядочить полученный оператор по исходным физическим полям $\psi(x)$. Эти же операции превращают также формальное отображение (96) в зависящее от температуры DM над "холодным" вакуумом $|0\widetilde{0}\rangle$, и именно в таком смысле правая часть уравнения (96) понимается далее как новое DM $\widehat{\Upsilon}$ (и тоже для: $c(k^1) \mapsto b(k^1)$):

$$\Psi(x,[-]\varsigma) = \Upsilon\left[\psi(x,[-]\varsigma)\right] = \Upsilon\left[\mathcal{V}_\vartheta \psi(x) \mathcal{V}_\vartheta^{-1}\right] \Rightarrow \tag{98}$$

$$\Rightarrow \widehat{\Upsilon}\left[[-]\varsigma; \psi(x)\right] = \widehat{\Upsilon}\left[[-]\varsigma; c(k^1), \widetilde{c}(k^1)\right], \text{ откуда:} \tag{99}$$

$$\langle 0(\varsigma)|\mathcal{F}\left[\Psi\right]|0(\varsigma)\rangle \Rightarrow \langle 0\widetilde{0}|\mathcal{F}\left[\widehat{\Upsilon}\left[[-]\varsigma; \psi(x)\right]\right]|0\widetilde{0}\rangle. \tag{100}$$

Преобразования Боголюбова и TFD

Напротив, стандартный способ вычислений подразумевает подстановку обратных к (74) или к (88) [+] линейных комбинаций физических полей $\psi(x) = \mathcal{V}_\vartheta \psi(x,[+]\varsigma)\mathcal{V}_\vartheta^{-1}$ в терминах "горячих" физических термополей, $\psi(x,[+]\varsigma) = \mathcal{V}_\vartheta^{-1}\psi(x)\mathcal{V}_\vartheta$, определенных соотношениями (74), в левую часть уравнения (95) и переупорядочение полученного таким образом оператора по этому "горячему" физическому термополю над термическим вакуумом $|0(\varsigma)\rangle$. Такие же операции дают новое DM $\widehat{\Upsilon}$ для исходного ГП над этим ("горячим") термовакуумом: $\Psi(x) = \Upsilon[\psi(x)] = \Upsilon[\mathcal{V}_\vartheta\psi(x,[+]\varsigma)\mathcal{V}_\vartheta^{-1}] \Longrightarrow \widehat{\Upsilon}\,[[+]\varsigma;\psi(x,[+]\varsigma)] = \widehat{\Upsilon}\left[[+]\varsigma; c(k^1,[+]\varsigma),\widetilde{c}(k^1,[+]\varsigma)\right]$. Подчеркнем, что это поле отнюдь не равно ГП $\Psi(x,[+]\varsigma) = \mathcal{V}_\vartheta^{-1}\Psi(x)\mathcal{V}_\vartheta$, которое возникает, как побочный продукт нашего рассмотрения. Воизбежание недоразумений следует отличать "горячие" и "холодные" ГП и физические термополя $\psi(x,[\pm]\varsigma)$ над соответствующими вакуумами. Тогда:

$$\langle 0(\varsigma)|\mathcal{F}\,[\Psi]\,|0(\varsigma)\rangle \Rightarrow \langle 0(\varsigma)|\mathcal{F}\left[\widehat{\Upsilon}\,[[+]\varsigma;\psi(x,[+]\varsigma)]\right]|0(\varsigma)\rangle.$$

Преобразования Боголюбова и TFD

Т.о., в рамках термополевой динамики при конечной температуре происходит удвоение числа степеней свободы: каждому физическому полю $\psi(x)$, или ГП $\Psi(x)$ сопоставляется его тильда-партнер $\widetilde{\Psi}(x)$ по правилам (75), (76). Полученная таким образом теория определяется уже Гамильтонианом $\widehat{\boldsymbol{H}}$ и ГУ, при $H[\Psi] = H_{0[\Psi]}(x^0) + H_{I[\Psi]}(x^0)$:

$$\widehat{\boldsymbol{H}}[\Psi, \widetilde{\Psi}] = H[\Psi] - \widetilde{H}[\widetilde{\Psi}], \quad \widetilde{H}[\widetilde{\Psi}] = H^*[\widetilde{\Psi}^*], \tag{101}$$

$$i\partial_0 \Psi(x, \varsigma) = [\Psi(x, \varsigma), H[\Psi]] = \left[\Psi(x, \varsigma), \widehat{\boldsymbol{H}}[\Psi, \widetilde{\Psi}]\right], \tag{102}$$

$$-i\partial_0 \widetilde{\Psi}(x, \varsigma) = \left[\widetilde{\Psi}(x, \varsigma), \widetilde{H}[\widetilde{\Psi}]\right] = -\left[\widetilde{\Psi}(x, \varsigma), \widehat{\boldsymbol{H}}[\Psi, \widetilde{\Psi}]\right], \tag{103}$$

при условии их кинематической независимости:

$$\left\{\Psi_\xi(x), \widetilde{\Psi}^{\#}_{\xi'}(y)\right\}\Big|_{x^0=y^0} = 0, \quad \left\{\Psi_\xi(x), \widetilde{\Psi}^{\#}_{\xi'}(y)\right\}\Big|_{(x-y)^2<0} = 0. \tag{104}$$

Поэтому достаточно решить лишь одно из этих ГУ.

Термодинамика идеальных 1+1D бозе и ферми газов

Равновесная термодинамика свободных безмассовых бозонов, $\varepsilon(p^1) = cp^1$, в одномерном ящике длины L совпадает с термодинамикой свободных безмассовых фермионов спина $1/2$ при той же температуре $\mathrm{k}_B T = 1/\varsigma$ только при тождественно равных нулю химических потенциалах, $\mu_{(B)} = \mu_{(F)} = 0$, что дает простейший пример термополевой бозонизации для давления P и плотностей внутренней энергии $\mathcal{U}$ и энтропии S:

$$P_{(B),(F)} = \frac{\mathcal{U}_{(B),(F)}}{L} = \frac{\pi^2}{3\varsigma^2 hc}, \quad \frac{S_{(B),(F)}}{\mathrm{k}_B L} = \left(\frac{\partial P_{(B),(F)}}{\partial(1/\varsigma)}\right)_\mu = \frac{2\pi^2}{3\varsigma hc}.$$

Однако, при заданных плотностях частиц ($h = 2\pi\hbar$, c -скорость света):

$$\overline{n}_{(B)} = N_{(B)}/L, \;\; \overline{n}^{\pm}_{(F)} = N^{\pm}_{(F)}/L, \tag{105}$$

$$\mu_{(B)}(T, \overline{n}_{(B)}) = \frac{1}{\varsigma}\ln\left(1 - e^{-\overline{n}_{(B)}\varsigma hc/2}\right), \tag{106}$$

$$\mu^{\pm}_{(F)}(T, \overline{n}^{\pm}_{(F)}) = \pm\frac{1}{\varsigma}\ln\left(e^{\overline{n}^{\pm}_{(F)}\varsigma hc/2} - 1\right). \tag{107}$$

Термодинамика идеальных 1+1D бозе и ферми газов

Качественно такая равновесная “картина” означает, что обе системы при одних и тех же ς, L имеют одинаковые, как $P, \mathcal{U}, S$, так и другие термодинамические потенциалы. То что $\mu_{(B)} = 0$ при любой температуре, согласно (106), означает бесконечную плотность бозонов: $\overline{n}_{(B)} \mapsto \infty$, то есть, специфику термодинамического предела $N_{(B)} \to \infty$, $L \to \infty$ в бозонной “картине”. Равновесное давление в фермионной “картине” является на самом деле суммой парциальных давлений $N^{+}_{(F)}$ фермионов и $N^{-}_{(F)}$ антифермионов с противоположными значениями химических потенциалов $\mu^{\pm}_{(F)} = \pm\mu_{(F)}$ и зарядов, и соответствующей зарядовой плотностью:

$$P_{(F)}(T, \mu_{(F)}) = P^{+}_{(F)}(T, \mu^{+}_{(F)}) + P^{-}_{(F)}(T, \mu^{-}_{(F)}) = \tag{108}$$

$$= \frac{\mathcal{U}_{(F)}}{L} = \frac{\pi^2}{3\varsigma^2 hc} + \frac{\mu^2_{(F)}}{hc} = \frac{1}{\varsigma^2 hc}\left(\frac{\pi^2}{3} + \gamma^2_{(F)}\right), \tag{109}$$

$$\frac{\mathrm{Q}_{(F)}}{L} = \overline{n}^{+}_{(F)} - \overline{n}^{-}_{(F)} = \left(\frac{\partial P_{(F)}}{\partial \mu_{(F)}}\right)_{\varsigma} = \frac{2\mu_{(F)}}{hc}, \tag{110}$$

где $\mathrm{Q}_{(F)} = \langle\!\langle \mathrm{Q}_{(F)} \rangle\!\rangle$ – усредненный полный заряд.

Термодинамика идеальных 1+1D бозе и ферми газов

При любых $\mu_{(F)}$, $\mu_{(B)}$, и $\gamma = \varsigma\mu$ это дает равновесные внутренние энергии и потенциалы Гиббса:

$$\frac{\mathcal{U}_{(B,F)}}{L} \equiv - \left[\left(\varsigma \frac{\partial P_{(B,F)}}{\partial \varsigma} \right)_{\gamma} + P_{(B,F)} \right] \Longrightarrow P_{(B,F)},$$

$$\mathcal{G}_{(B,F)} \equiv \mathcal{U}_{(B,F)} + P_{(B,F)} L - T S_{(B,F)}, \tag{111}$$

$$\mathcal{G}_{(B)} = N_{(B)} \mu_{(B)}, \ \ \mathcal{G}_{(F)} = N^{+}_{(F)} \mu^{+}_{(F)} + N^{-}_{(F)} \mu^{-}_{(F)} =$$

$$= \left(N^{+}_{(F)} - N^{-}_{(F)} \right) \mu_{(F)} = \mathrm{Q}_{(F)} \mu_{(F)} = \frac{2L\mu^2_{(F)}}{hc}. \tag{112}$$

Откуда: $\mathcal{G}_{(F)} \Longrightarrow \mathcal{G}_{(B)} \mapsto 0$, только при: $\mu^{\pm}_{(F)} = \mu_{(F)} = 0$, и: $\overline{n}^{+}_{(F)} = \overline{n}^{-}_{(F)} = \overline{n}^{0}_{(F)} = 2 \ln 2/(\varsigma hc)$, в роли закона действующих масс, т.е. только в секторе с нулевым полным зарядом $\mathrm{Q}_{(F)} = 0$. Аналогично равновесному излучению, давление безмассовых частиц на стенку связано с их равновесным поглощением и эмиссией ею, разумеется, при $\mu_{(B)} = \mu_{(F)} = 0$.

Термодинамика идеальных 1+1D бозе и ферми газов

Пусть, например, левая стенка в единицу времени поглощает N_{L}^{+} левых фермионов и N_{L}^{-} левых антифермионов, – летящих влево с суммарным зарядом $\mathrm{Q}_{\mathrm{L}} = N_{\mathrm{L}}^{+} - N_{\mathrm{L}}^{-}$, и излучает N_{R}^{+} правых фермионов и N_{R}^{-} правых антифермионов, – летящих вправо с суммарным зарядом $\mathrm{Q}_{\mathrm{R}} = N_{\mathrm{R}}^{+} - N_{\mathrm{R}}^{-}$. Так как стенка в равновесии остается незаряженной, то: $\mathrm{Q}_{\mathrm{R}} - \mathrm{Q}_{\mathrm{L}} = \mathrm{Q}_{5(F)} = 0$. А так как полный заряд (110) для $\mu_{(F)} = 0$ также обращается в ноль: $\mathrm{Q}_{\mathrm{R}} + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}} = \mathrm{Q}_{(F)} = 0$, то для такого равновесного состояния: $N_{\mathrm{R,L}}^{+} = N_{\mathrm{R,L}}^{-}$, обеспечивая полное превращение правых и левых фермион-антифермионных пар: $\chi_{\mathrm{R,L}}^{+} + \chi_{\mathrm{R,L}}^{-} \rightleftharpoons$ [в произвольное число бозонов, летящих вправо и влево] соответственно. Такое качественное описание равновесной бозонизации подразумевает наличие ненулевой плотности фермионов (105) при конечной температуре $T > 0$, которая обращается в ноль лишь при $T = 0$, что отвечает уже "абсолютной" бозонизации, – с нулевой энергией Ферми: $\mu_{(F)}^{+}(0, \overline{n}_{(F)}^{+}) = \overline{n}_{(F)}^{+} hc/2$.

Термодинамика идеальных 1+1D бозе и ферми газов

Согласно (111), (112), при $T > 0$ формальный инфракрасный параметр L приобретает физический смысл макроскопического термодинамического параметра данной термодинамической системы.

Термополевая бозонизация в модели Тирринга

Для $T=0$, при наличии взаимодействия ток$\otimes$ток безмассовые фермионы в 1+1D также склеиваются в свободные безмасовые бозоны. При: $E(P^1)=\gamma^5 P^1$, $\gamma^5=\gamma^0\gamma^1\Rightarrow\sigma_3$, $P^1=-i\partial_1$, $\xi=\pm$:

$$H[\Psi] = H_{0[\Psi]}(x^0) + H_{I[\Psi]}(x^0), \tag{113}$$

$$H_{I[\Psi]}(x^0) = \frac{g}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx^1 J_{(\Psi)\,\mu}(x) J^{\mu}_{(\Psi)}(x), \tag{114}$$

$$H_{0[\Psi]}(x^0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \Psi^{\dagger}(x) E(P^1)\Psi(x), \tag{115}$$

$$\left\{\Psi_{\xi}(x), \Psi^{\dagger}_{\xi'}(y)\right\}\Big|_{x^0=y^0} = \delta_{\xi,\xi'}\delta\left(x^1-y^1\right), \quad \left(\otimes Z_{(\Psi)}(x-y)\right), \tag{116}$$

$$\left\{\Psi_{\xi}(x), \Psi_{\xi'}(y)\right\}\Big|_{x^0=y^0} = 0, \quad \gamma^{\mu}\gamma^5 = -\epsilon^{\mu\nu}\gamma_{\nu}, \tag{117}$$

$$J^{\mu}_{(\Psi)}(x) \longmapsto \overline{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\Psi(x), \;\; J^{5\mu}_{(\Psi)}(x) \longmapsto \overline{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma^5\Psi(x), \tag{118}$$

$$J^{\xi}_{(\Psi)}(x) = J^{0}_{(\Psi)}(x) + \xi J^{1}_{(\Psi)}(x) \longmapsto 2\Psi^{\dagger}_{\xi}(x)\Psi_{\xi}(x), \tag{119}$$

Термополевая бозонизация в модели Тирринга

ГУ для полей ведут к сохранению обоих токов, задавая для них свободную динамику:

$$i\partial_0 \Psi(x) = [\Psi(x), H[\Psi]] = \left[E(P^1) + g\gamma^0\gamma_\nu J^\nu_{(\Psi)}(x)\right] \Psi(x), \quad (120)$$

$$\partial_\mu J^\mu_{(\Psi)}(x) = 0, \;\; \partial_\mu J^{5\mu}_{(\Psi)}(x) = -\epsilon_{\mu\nu}\partial^\mu J^\nu_{(\Psi)}(x) = 0, \quad (121)$$

$$i\partial_0 \gamma^0\gamma_\nu J^\nu_{(\Psi)}(x) - \left[\gamma^0\gamma_\nu J^\nu_{(\Psi)}(x), H_{0[\Psi]}(x^0)\right] = iI\,\partial_\mu J^\mu_{(\Psi)}(x) +$$

$$+ i\gamma^5\,\epsilon_{\mu\nu}\partial^\mu J^\nu_{(\Psi)}(x) \equiv 0 = \left[\gamma^0\gamma_\nu J^\nu_{(\Psi)}(x), H_{I[\Psi]}(x^0)\right], \quad (122)$$

и приводя к линеаризации ГУ, с учетом их слабого смысла:

$$\gamma^0\gamma_\nu J^\nu_{(\Psi)}(x) \overset{\mathrm{w}}{\longmapsto} \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}\gamma^0\gamma_\nu \widehat{J}^\nu_{(\chi)}(x), \quad \text{где:} \quad (123)$$

$$\widehat{J}^\nu_{(\chi)}(x) \Rightarrow :J^\nu_{(\chi)}(x):, \;\; \text{для:} \;\; Z_{(\chi)}(a) = 1, \quad (124)$$

и $\chi(x)$ - свободное безмассовое поле Дирака: $(\gamma\partial)\chi(x) = 0$, а компоненты векторного тока, перенормированные далее нормальным упорядоченнием, определены швингеровской раздвижкой с вычитанием среднего по вакууму

Термополевая бозонизация в модели Тирринга

и для ГП $\Psi(x)$, при $\widetilde{\varepsilon}^0 = \varepsilon^1 \to 0$, для $\widetilde{\varepsilon}^1 = \varepsilon^0$, $\varepsilon^2 = -\widetilde{\varepsilon}^2 > 0$,

$$J^0_{(\Psi)}(x) \longmapsto \lim_{\widetilde{\varepsilon}\to 0} \widehat{J}^0_{(\Psi)}(x;\widetilde{\varepsilon}) = \widehat{J}^0_{(\Psi)}(x),$$

$$J^1_{(\Psi)}(x) \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{J}^1_{(\Psi)}(x;\varepsilon) = \widehat{J}^1_{(\Psi)}(x), \quad \text{где:} \quad \widehat{J}^\nu_{(\Psi)}(x;a) = \tag{125}$$

$$= Z^{-1}_{(\Psi)}(a)\left[\overline{\Psi}(x+a)\gamma^\nu\Psi(x) - \langle 0|\overline{\Psi}(x+a)\gamma^\nu\Psi(x)|0\rangle\right], \tag{126}$$

Константы β и перенормировки $Z_{(\Psi)}(a)$ ГП в (116) и его динамическая размерность определяются самосогласованным вычислением; при $a \to 0$:

$$Z_{(\Psi)}(a;\beta) \Rightarrow \left[-\Lambda^2 a^2\right]^{-\overline{\beta}^2/4\pi}, \quad \mathrm{d}_{(\Psi)} = 1/2 + \overline{\beta}^2/4\pi. \tag{127}$$

Аналогично (121), сохранение векторного тока означает потенциальность аксиального: $\exists$ псевдоскалярное поле $\phi(x)$:

$$\widehat{J}^\mu_{(\chi)}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x), \quad \widehat{J}^{-\xi}_{(\chi)}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_\xi\varphi^\xi\left(x^\xi\right), \tag{128}$$

$$x^\xi = x^0 + \xi x^1, \quad \phi(x) = -\sum_{\xi=\pm}\xi\varphi^\xi\left(x^\xi\right), \quad \partial^2\phi(x) = 0. \tag{129}$$

Термополевая бозонизация в модели Тирринга

Квантование правых и левых полей $\varphi^{\xi}(s) = \varphi^{\xi(+)}(s) + \varphi^{\xi(-)}(s)$, в простанстве состояний псевдоскалярного поля, $k^0 = |k^1|$:

$$\varphi^{\xi(+)}(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^1}{2k^0} \frac{\xi\theta(-\xi k^1)}{2\pi} c(k^1) e^{-ik^0 s}, \ \ \varphi^{\xi(-)}(s) = \left[\varphi^{\xi(+)}(s)\right]^{\dagger},$$

определяет представление решения уравнения Дирака для свободного поля $\partial_{\xi}\chi_{\xi}(x) = 0$: $\xi = \pm$, Q^{ξ} -операторы зарядов,

$$\chi_{\xi}\left(x^{-\xi}\right) = \mathcal{N}_{\varphi}\left\{\exp\left(-i2\sqrt{\pi}\left[\varphi^{-\xi}(x^{-\xi}) + \frac{\xi}{4} Q^{\xi}\right]\right)\right\} u_{\xi}, \quad (130)$$

$$u_{\xi} = \left(\frac{\overline{\mu}}{2\pi}\right)^{1/2} e^{i\varpi - i\xi\Theta/4} \exp\left\{-a_0 \frac{\pi}{8}\right\} \equiv u_{\xi}^{Ok} \exp\left\{-a_0 \frac{\pi}{8}\right\}. \quad (131)$$

Решающее значение для интегрирования линеаризованных ГУ имеет неединственность этого представления поля $\chi(x)$, как следствие УНП правых и левых полей, даваемых бозонными преобразованиями Боголюбова $U_{\eta} = \exp F_{\eta}$ с параметром η, при $\overline{\alpha} = 2\sqrt{\pi}\cosh\eta$, $\overline{\beta} = 2\sqrt{\pi}\sinh\eta$, $\overline{\alpha}^2 - \overline{\beta}^2 = 4\pi$.

Термополевая бозонизация в модели Тирринга

Formal solution of (120), (123), as time-ordered exponentials:

$$Y(t) = T_A \left\{ \exp \left(\int_0^t d\tau A(\tau) \right) \right\} Y(0) \left[T_B \left\{ \exp \left(\int_0^t d\tau B(\tau) \right) \right\} \right]^{-1},$$

replaced by the usual ones, recasting solution into the normal form:

$$\Psi_\xi(x) = \Psi_\xi(x^1, x^0) = e^{C^{\xi(-)}(x)} \Psi_\xi \left(x^1 - \xi x^0, 0 \right) e^{C^{\xi(+)}(x)},$$

bosonization (128) of the vector current of field $\chi(x)$ (130) gives:

$$C^{\xi(\pm)}(x) = -i \frac{\beta g}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{x^0} dy^0 \widehat{J}^{-\xi(\pm)}_{(\chi)} \left(x^1 + \xi y^0 - \xi x^0, y^0 \right) =$$

$$= -i \frac{\beta g}{2\pi} \left[\varphi^{\xi(\pm)} \left(x^\xi \right) - \varphi^{\xi(\pm)} \left(-x^{-\xi} \right) \right].$$

Remarkably, that the completely unknown "initial" HF $\Psi_\xi(x^1 - \xi x^0, 0) \Rightarrow \lambda_\xi(x^{-\xi})$ appears here also as a solution of free massless Dirac equation, $\partial_\xi \lambda_\xi(x^{-\xi}) = 0$.

Термополевая бозонизация в модели Тирринга

$$\omega^{\xi}\left(x^{\xi}\right) = U_{\eta}^{-1}\varphi^{\xi}\left(x^{\xi}\right)U_{\eta} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\overline{\alpha}\varphi^{\xi}\left(x^{\xi}\right) + \overline{\beta}\varphi^{-\xi}\left(-x^{\xi}\right)\right],$$

$$\mathcal{W}^{\xi} = U_{\eta}^{-1}Q^{\xi}U_{\eta} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\overline{\alpha}Q^{\xi} - \overline{\beta}Q^{-\xi}\right], \qquad F_{\eta} =$$

$$= 2i\eta\int_{-\infty}^{\infty}dy^{1}\varphi^{\xi}(y^{\xi})\partial_{0}\varphi^{-\xi}(-y^{\xi}), \quad \lambda_{\xi}(x^{-\xi}) = U_{\eta}^{-1}\chi_{\xi}(x^{-\xi})U_{\eta} =$$

$$= \mathcal{N}_{\varphi}\left\{\exp\left(-i2\sqrt{\pi}\left[\omega^{-\xi}\left(x^{-\xi}\right) + \frac{\xi}{4}\mathcal{W}^{\xi}\right]\right)\right\}v_{\xi}, \tag{132}$$

$$v_{\xi} = \exp\left\{-a_{0}\frac{\overline{\beta}^{2}}{16}\right\}\left(\frac{\overline{\mu}}{\Lambda}\right)^{\overline{\beta}^{2}/4\pi}u_{\xi},$$ $\mathcal{N}_{\varphi}$ - норм. ф-ма по $\varphi^{\xi(\pm)}$.

Наличие трансформационных свойств при преобразованиях Лоренца для спина 1/2 и выполнение CAR (116), (117) налагают связи на введенные параметры, соответственно:

$$\overline{\alpha}^{2} - \overline{\beta}^{2} = 4\pi, \quad \overline{\beta} - \frac{\beta g}{2\pi} = 0, \quad e^{\eta} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta} = \sqrt{1 + \frac{g}{\pi}}. \tag{133}$$

Термополевая бозонизация в модели Тирринга

При $T > 0$ удвоение числа зарядов требует решать все заново:

$$\Psi_\xi(x;[\pm]\varsigma) = \mathcal{N}_\varphi\left(\exp\{\Re_\xi(x;[\pm]\varsigma)\}\right) w_\xi\left(\mu_1,\varsigma\right),$$

$$\Re_\xi(x;[\pm]\varsigma) = -i\left[\mathcal{B}^{-\xi}(x;[\pm]\varsigma) + \frac{\Sigma_0^\xi}{4}\mathrm{G}^{-\xi}([\pm]\varsigma) + \frac{\Sigma_1^\xi}{4}\mathrm{G}^{\xi}([\pm]\varsigma)\right],$$

при: $\mathcal{B}^{-\xi}(x;[\pm]\varsigma) = \overline{\alpha}\varphi^{-\xi}(x^{-\xi};[\pm]\varsigma)) + \overline{\beta}\varphi^{\xi}(x^{\xi};[\pm]\varsigma)),$

$\mathrm{G}^\xi([\pm]\varsigma) = Q^\xi([\pm]\varsigma) + [\pm 1]\widetilde{Q}^\xi([\pm]\varsigma),$ и где: $w_\xi(\mu_1,\varsigma) =$

$$= \left(\frac{\overline{\mu}}{2\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{\overline{\mu}}{\Lambda}\right)^{\overline{\beta}^2/4\pi} e^{i\varpi - i\xi\Theta/4}\exp\left\{-g(\varsigma,\mu_1)\left(\frac{1}{2}+\frac{\overline{\beta}^2}{4\pi}\right)\right\},$$

$\Sigma_0^\xi = \overline{\alpha}\sigma_0^\xi - \overline{\beta}\sigma_1^\xi,\quad \Sigma_1^\xi = \overline{\alpha}\sigma_1^\xi - \overline{\beta}\sigma_0^\xi,\quad \ell, n$ - целые числа,

$\sigma_0^\xi = -\xi\sigma \Rightarrow \xi(2\ell+1),\quad \sigma_1^\xi = \xi 1 + \rho \Rightarrow \xi 1 + (2n+1).$

Найденные условия обеспечивают выполнение CAR (116), локальность и кинематическую независимость (104) одновременно и для свободных, и для Тирринговских термополей и их тильда-партнеров независимо.

Термополевая бозонизация в модели Тирринга

Отбрасывание при $T = 0$ тильдованных зарядов приводит полученное решение для термополя Тирринга к двухпараметрическому обобщению решения Оксака с произвольными σ и ρ, уже как непрерывными параметрами преобразований, обобщающих преобразования конформного сдвига.
Известные решения отвечают $\rho = 0$ и частным значениям σ, отличающимся от допустимых при $T > 0$: $\sigma = 0$ для решения Оксака; $\sigma = \pm 1$ для двух возможных вариантов решений Мандельстама; $\sigma = -\coth 2\eta$ для решения Морчио и др.